

Bind 21

DET NORSKE SKOGFORSØKSVESEN, VOLLEBEKK, NORGE

---

*Norwegian Forest Research Institute, Vollebekk, Norway*

HELGE BRAASTAD

# Volumtabeller for bjørk

*Volume Tables for Birch*

---

VOLLEBEKK 1966



## Innhold

Forord .....	27
I. Innledning .....	29
II. Grunnmaterialet .....	29
III. Eldre volumtabeller .....	35
A. Vurdering av den norske og de svenske volumtabeller for bjørk .....	35
IV. Beregning av funksjoner for volumet på bark	
A. Metodikk .....	44
1. Grafisk og numerisk utjamning .....	44
2. Volumfunksjoner .....	44
3. Formtallsfunksjoner .....	44
4. Regresjoner med vektorer .....	44
B. Funksjonene .....	46
C. Diameteren ved 6 meter .....	49
D. Gruppering av materialet .....	52
1. Geografisk gruppering .....	53
2. Gruppering etter arter .....	55
V. Beregning av funksjoner for volumet under bark .....	61
VI. Kubikktabeller for bjørk på rot .....	67
VII. Sammendrag .....	68
VIII. Litteratur .....	76
IX. Summary .....	77



## Forord

Dette arbeidet er finansiert med midler fra Skogbrukets og Skogindustrienes Forskningsforening og ved de ordinære statsbevilgninger.

Avdelingens leder, professor Alf Brantseg, har gitt meg de aller beste arbeidsmuligheter. Han har fulgt nøye med i arbeidets utvikling og gitt meg mange verdifulle råd og god støtte.

Alle beregninger i dette arbeidet er programmert i Algol og beregnet på Facit EDB, Meteorologisk Institutt.

Forsøksleder Dr. Lars Strand har alltid tatt seg tid til å gi meg god hjelp og veiledning om matematiske og statistiske spørsmål, og har gitt meg uvurderlig støtte med programmering for den elektroniske databehandling.

Skogtekniker Bersvein Flakne har deltatt i alle faser av arbeidet og vært til god hjelp både med stansing av data, beregninger og korrekturlesing.

Skogtekniker Tidemann Kolsrud har tegnet figurene.

Professor dr. Peder Braathe, professor Alf Brantseg, forsøksleder Dr. Lars Strand og stipendiat Bjørn Tveite har lest manuskriptet og gitt meg verdifulle råd.

Til disse institusjoner og personer vil jeg rette min hjerteligste takk for all hjelp og støtte.

Vollebakk, november 1965.

*Helge Braastad.*



## I. Innledning

Det norske Skogforsøksvesen publiserte i 1944 volumtabell for bjørk på rot med bark (RUDEN 1944). Da alle felte trær på de faste forsøksfelter i bjørkeskog er seksjonskubert også etter 1944, er materialet blitt betydelig større. Ved suppleringsmålinger av grunnmaterialet for tilvekstundersøkelser i bjørkeskog i årene 1961 til 1963 ble det lagt ut 74 engangsfelter fordelt over Sørlandet, Østlandet, Trøndelag og Helgeland. På disse felter ble alle felte trær seksjonskubert.

Dette nye og relativt store materialet var det naturlig først å teste mot den norske volumtabell for bjørk, (RUDEN l.c.) og mot de svenske volumfunksjoner for bjørk (NÄSLUND 1940 og 1947). Det viste seg imidlertid at ingen av disse volumtabellene kuberte Skogforsøksvesenets materiale tilfredsstillende.

Under beregning av produksjonstabeller er det viktig å ha en god volumtabell både for kubering av prøveflatene og for volumberegningen av produksjonstabellene. Det er derfor funnet riktig å beregne nye volumfunksjoner for bjørk. Samtidig er det undersøkt om det er nødvendig å lage egne funksjoner for lavlandsbjørk (*Betula verrucosa*) og vanlig bjørk (*Betula pubescens*). Videre er det undersøkt om en geografisk oppdeling av materialet gir bedre volumfunksjoner enn en generell funksjon for hele landet.

## II. Grunnmaterialet

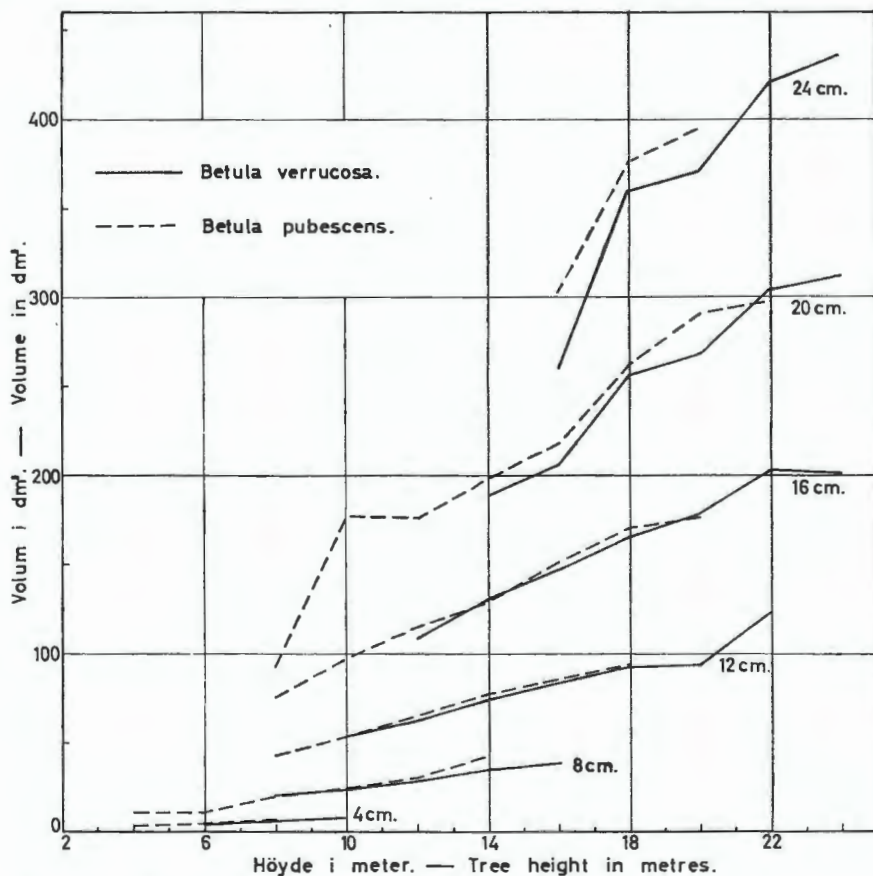
Materialet består av 3312 stammer som er kubert med en-meters seksjoner. Kløftede trær er ikke tatt med, og trær hvor barkmåling ikke er utført, er holdt utenfor beregningene. I materialet inngår det 1920 trær som er brukt ved testing av den norske og de svenske volumtabellene, 100 trær som ble seksjonskubert i Trøndelag og Nord-Norge sommeren 1963, og 1293 trær fra Det norske Skogforsøksvesens faste forsøksfelter. 311 trær er disponert som testmateriale.

Grunnmaterialet er delt i følgende 6 grupper på grunnlag av arter og distrikter:

Landsdel	Lavlandsbjørk		Vanlig bjørk		Lavlandsbjørk og vanlig bjørk	
	Antall Number	Mid. volum Average vol.	Antall Number	Mid. volum Average vol.	Antall Number	Mid. volum Average vol.
Sørlandet og Østlandet . . . . .	1761	192,7	829	78,6	2590	156,1
Trøndelag og Nord-Norge . . . . .	—	—	722	52,7	722	52,7
Hele materialet	1761	192,7	1551	66,6	3312	133,6

I figur 1 er grunnmaterialet for lavlandsbjørk og for vanlig bjørk satt opp for de representerte diameter- og høydeklasser.

Hele materialgruppen lavlandsbjørk stammer fra området Sørlandet og Østlandet og utgjør 1761 trær, tabell 1. For vanlig bjørk er grunnmaterialet delt i 2 grupper. Den ene gruppen består av trær fra Sørlandet og Østlandet med 829 trær, tabell 2, og den andre gruppen av trær fra Trøndelag og Nord-Norge med 722 trær, tabell 3.



Figur 1. Sammenligning av grunnmaterialet for *Betula verrucosa* og *Betula pubescens*.

Comparison of the basic material for *Betula verrucosa* and *Betula pubescens*.



Tabell 1. Lavlandsbjørk. Frekvensfordeling og klassenes gjennomsnittlige volum i 1/10 dm<sup>3</sup>.  
*Betula verrucosa. The frequency-distribution and the average volume for the classes in 1/10 dm<sup>3</sup>.*

		Høydeklasser — Height classes													Sum
		6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	Sum	
2	21 3	28 1												4	
4	46 16	63 30	82 8											54	
6	84 7	112 42	143 42	171 16										107	
8	205 5	243 59	279 50	350 25	379 5									144	
10	320 4	389 26	460 54	521 60	592 26	647 7	736 1							178	
12	537 12	623 27	738 66	838 59	925 36	931 2	1 232 1							203	
14	763 2	890 14	989 46	1 157 69	1 290 50	1 397 21	1 868 3	1 655 1						208	
16	1 084 4	1 304 16	1 472 51	1 654 39	1 783 37	2 030 14	2 691 4	1 633 2	2 018 4	2 691 1				166	
18	1 440 2	1 659 13	1 801 24	2 039 44	2 278 41	2 373 21	2 644 10	3 394 2	3 456 7	3 836 18	4 597 12	4 834 1		158	
20	1 863 3	2 064 17	2 564 36	3 046 36	3 120 18	3 456 7	3 836 18	4 597 12	4 834 1					155	
22	1 816 1	2 440 8	2 943 19	3 258 31	3 614 36	3 836 18	4 597 12	4 834 1						126	

Diameterklasser — Diameter classes

Høydeklasser — Height classes														Sum
	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	Sum	
24						2 599	3 593	3 703	4 205	4 358	4 675		103	
						2	10	23	30	24	14			
26						3 534	3 606	4 443	4 694	5 353	5 401		64	
						1	5	19	17	15	7			
28							5 002	4 776	5 249	5 287	6 458		35	
							2	3	13	6	11			
30								4 987	5 469	6 611	6 633		27	
								2	4	12	9			
32									5 682	7 402	7 987		7	
									1	2	4			
34									7 157	8 648	11 154	11 001	6	
									1	3	1	1		
36									8 387	10 734	8 836	12 991	5	
									1	1	2	1		
38											11 077	13 628	5	
											4	1		
40									8 436		12 668	13 166	3	
									1		1	1		
42											12 110		1	
											1			
44											15 473	11 694	2	
											1	1		
Sum	26	82	149	167	230	262	248	218	179	115	78	7	1 761	

Tabell 2. Vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet. Frekvensfordeling og klas-  
senes gjennomsnittlige volum i 1/10 dm<sup>3</sup>.

*Betula pubescens* from Sørlandet and Østlandet. The frequency-distribution  
and the average volume in 1/10 dm<sup>3</sup>.

	Høydeklasser — Height classes										Sum	
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22		
2	19 3	23 2										5
4	33 25	48 30	60 5									60
6	73 3	93 47	121 43	140 13	202 1							107
8		100 31	202 36	253 59	299 12	426 3						141
10		221 3	317 18	392 54	471 44	558 12						131
12			424 15	571 22	657 47	772 40	861 6	944 1				131
14			568 4	730 9	875 35	976 22	1 208 7	1 291 2				79
16			739 2	997 2	1 133 10	1 316 21	1 478 12	1 709 18	1 763 1			66
18			987 1	1 312 2	1 425 8	1 634 9	1 871 10	2 147 8	2 438 1			39
20			930 1	1 770 2	1 977 4	1 926 5	2 318 8	2 633 12	2 911 1	2 981 1		34
22					2 014 1	2 047 1	2 750 2	3 251 6	3 514 5	3 074 2		17
24							3 046 1	3 760 3	3 951 1			5
26					2 625 1	3 633 2	3 923 2	4 080 2		4 017 1		8
28					3 379 1		3 981 1			4 815 1		3
30						4 580 1	5 428 1	5 889 2				4
Sum	31	113	125	163	164	116	50	54	9	5		829

Tabell 3. Vanlig bjørk fra Trøndelag og Nord-Norge. Frekvensfordeling og klassenes gjennomsnittlige volum i 1/10 dm<sup>3</sup>.

*Betula pubescens* from Trøndelag and North-Norway. The frequency-distribution and the Average volume in 1/10 dm<sup>3</sup>.

	Høydeklasser — Height classes							Sum
	4	6	8	10	12	14	16	
2		23 1						1
4	36 15	46 38	108 3					56
6	69 3	91 49	118 54	165 5				111
8	111 1	151 10	204 66	248 52	345 2			131
10		232 1	320 24	370 84	445 25	580 3		137
12			443 3	529 53	656 54	785 5		115
14			691 1	686 12	843 48	926 8		69
16			787 1	965 5	1 160 21	1 255 13	1 580 5	45
18				1 132 1	1 354 18	1 605 9	1 837 1	29
20					1 589 5	2 035 6	1 991 1	12
22					2 200 2	2 247 4	2 560 6	12
24								
26						3 179 2	3 601 2	4
Sum	19	99	152	212	175	50	15	722

### III. Eldre volumtabeller for bjørk

Det Norske Skogforsøksvesens kubikktabeller for stående bjørk er utarbeidet av RUDEN (1944). Materialet er 1712 trær, hvorav 923 er fra låglandet i Sør-Norge og 393 fra Nord-Norge. Tabellene gjelder for trær større enn 5 cm, og er beregnet på grunnlag av grafisk utjamning av formtallet.

NÄSLUND (1940 og 1947) har beregnet formtallsfunksjoner for bjørk i Nord-Sverige, Sør-Sverige og hele Sverige. For Nord-Sverige er materialet 837 trær, for Sør-Sverige 1363 trær og for hele Sverige er disse to grupper slått sammen. For disse tre områder ble det beregnet funksjoner for formtallet på og under bark, med en stor og en mindre funksjonstype. De større funksjonene har foruten diameter og høyde også kronehøyde og/eller barktykkelse som variable. De mindre funksjonene har bare diameter og høyde som variable i forskjellige kombinasjoner. For Nord-Sverige er det også beregnet en funksjon for trær mindre enn 5 cm ved brysthøyde. Näslund har multiplisert formtallsfunksjon med  $D^2H \cdot \frac{\pi}{4} 0.99$ , og de transformeres dermed til funksjoner for volumet over stubben, når treets brysthøydiameter, barktykkelse og høyde over marken er kjent.

For Finland har ILVESSALO (1947) beregnet volumtabeller for furu, gran og bjørk. Disse tabeller er beregnet ved hjelp av variablene diameter, høyde og form. Som formfaktor for trær høyere enn 8 m er avsmalningen mellom 1.3 og 6.0 m benyttet. For trær på 6 og 7 m ble øvre diameter målt ved 3.5 m. For trær mindre enn 5 cm er det ikke funnet nødvendig å måle noen øvre diameter. Tabellene er konstruert ved en kombinasjon av en grafisk og numerisk utjevning. Funksjonen  $V = a \cdot D_{1.3}^b$  er først tilpasset materialet.  $V = \text{volum}$ ,  $D_{1.3} = \text{brysthøydiameter}$ .

$D_{1.3}$  er avsatt over abscissen, og en passende verdi for  $b$  er valgt for hvert treslag, hver avsmalingsklasse og hver høydeklasse. Størrelsen  $b$  er valgt mellom 2.0 og 2.5. Verdien av  $a$  ble funnet for hvert enkelt treslag, avsmalingsklasse og høydeklasse som et middel for diameterklassene. Innen diameterklassene er variasjonene for  $a$  stort sett meget liten.

For bjørk er det på denne måten beregnet tabeller for volumet på bark for 12 avsmalingsklasser, og tabeller for volumet under bark for 9 avsmalingsklasser.

#### A. Vurdering av den norske og de svenske volumtabeller for bjørk

Etter 1944 da Rudens volumtabell ble beregnet, er det på de faste flater og engangsflater i bjørkbestand seksjonskubert i alt 1920 bjørkestammer. Dette materialet er sammenlignet med Rudens volumtabell og Näslunds volumfunksjoner for bjørk med bark. For å undersøke om det er noen forskjeller

i formen hos bjørk fra ulike landsdeler, eller mellom lavlandsbjørk og vanlig bjørk, er materialet delt opp i de samme grupper som det samlede grunnmaterialet. Nedenfor er de 6 forskjellige grupper og antallet innen hver gruppe, ført opp.

Materialgrupper <i>Groups of the basic material</i>	Antall trær <i>Number of trees</i>
A: Hele materialet <i>All trees</i>	1 920
(L + Ms): Lavlandsbjørk og Vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet <i>B. verrucosa and B. pubescens from Sørlandet and Østlandet</i>	1 740
L: Lavlandsbjørk <i>B. verrucosa</i>	1 353
M: Vanlig bjørk fra hele landet <i>All B. pubescens</i>	567
Ms: Vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet <i>B. pubescens from Sørlandet and Østlandet</i>	387
Mn: Vanlig bjørk fra Trøndelag og Nord-Norge <i>B. pubescens from Trøndelag and North Norway</i>	180

Disse grupper er sammenholdt med følgende volumtabeller:

- |                       |                                |
|-----------------------|--------------------------------|
| 1: Hele Sverige       | Større funksjon Näslund (1947) |
| 2: Sør-Sverige        | Større funksjon Näslund (1947) |
| 3: Nord-Sverige       | Større funksjon Näslund (1940) |
| 4: Rudens volumtabell | Ruden (1944)                   |

Volumet av de enkelte prøvetrær er beregnet etter de forskjellige volumtabeller. Differensen mellom beregnet volum og virkelig volum er regnet i prosent av treets virkelige volum. (B = Beregnet volum og V = Virkelig volum).

$$\text{Differanse i prosent} = 100 \frac{B - V}{V}$$

Tabell 4 viser hvordan Näslunds funksjon for hele Sverige har kubert lavlandsbjørk (kombinasjonen 1 — L). Materialet er delt i diameterklasser med 3 cm's intervaller, og høydeklasser med 2 meters intervall. Innen disse klassene er denne gjennomsnittlige differanse i prosent beregnet og ført opp sammen med antallet i klassen.

Tabell 5 viser resultatet når Näslunds funksjon for hele Sverige kuberer vanlig bjørk fra hele landet.

Tilsvarende beregninger som vist i tabell 4 og 5 er utført for en rekke forskjellige kombinasjoner av materialgrupper og volumtabeller. Tabell 6 viser hvor stor den gjennomsnittlige over- eller underkubering er blitt for de ulike materialgrupper og volumtabeller. En ser at alle volumtabeller har overkubert gruppene A, (L + Ms) og L, og at gruppene M, Ms og Mn alltid er underkubert. Dette betyr at lavlandsbjørk blir sterkt overkubert av alle tabellene og at vanlig bjørk blir nesten like sterkt underkubert.

Tabell 6. Gjennomsnittlig differanse i % og treantall for de forskjellige volumtabeller og materialgrupper.

*Average difference in % and the number of trees for different volume tables and groups of data.*

Material- grupper	Volumtabeller — <i>Volume tables</i>							
	1		2		3		4	
	%	Antall Number	%	Antall Number	%	Antall Number	%	Antall Number
A	+ 2,57	1 920					+ 2,23	1 821
(L + Ms)	+ 3,17	1 740	+ 3,36	1 740			+ 2,52	1 642
L	+ 4,63	1 353	+ 4,83	1 353			+ 3,96	1 256
M	— 2,35	567	— 2,17	504				
Ms	— 1,94	387	— 1,78	387	— 1,91	387	— 2,17	386
Mn	— 3,20	180			— 2,72	180	— 0,43	179

Av tabell 6 går det fram at et mindre treantall er sammenlignet med Rudens tabell enn med Näslunds funksjoner. Dette kommer av at en del trær med noe ekstremt d/h forhold falt utenfor Rudens volumtabell.

Det er ellers ikke så stor forskjell mellom volumtabellene. Rudens tabell kuberer bjørk fra Trøndelag og Nord-Norge noe bedre enn de andre tabeller, men også for de andre gruppene er differansen minst for Rudens tabell, unntatt gruppe Ms, som blir best kubert med Näslunds funksjon for Sør-Sverige.

For å få et mål på hvordan de forskjellige tabellene kuberer små og store dimensjoner, er materialet delt i følgende 6 volumklasser: 0 — 100, 100 — 200, 200 — 300, 300 — 400, 400 — 700 og > 700 dm<sup>3</sup>. I den siste klassen er det bare 27 trær. For hver klasse er den prosentiske over- eller underkubering beregnet. Resultatet er satt opp i tabell 7 og i fig. 2, 3 og 4.

Beregningene med Näslunds funksjoner viser at for gruppene (L+Ms) og L

Tabell 4. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når lavlandsbjørk er kubert med Näslands funksjon for hele Sverige.

*Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volum of Betula verrucosa is calculated with Näslands function.*

		Høydeklasser — Height classes												Sum	
		5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	25,0— 26,9	27,0— 28,9	29,0— 30,9	Sum
5,0—	+ 1,2														+ 5,4
7,9	7	+ 1,3	+ 4,1	+ 11,5	+ 11,9	+ 14,4	+ 17,2	+ 15,6							+ 84
8,0—		+ 24	+ 27	+ 23	+ 7,4	+ 14,4	+ 17,2	+ 15,6							+ 7,3
10,9		+ 4,7	+ 5,8	+ 5,2	+ 4,6	+ 28	+ 8	+ 1							+ 164
11,0—		+ 6	+ 23	+ 0,1	+ 1,9	+ 6,9	+ 10,4	+ 8,3	+ 21,1						+ 5,5
13,9			+ 0,4	+ 27	+ 7,2	+ 7,4	+ 51	+ 8	+ 2						+ 236
14,0—			+ 2	+ 0,7	+ 0,1	+ 1,7	+ 4,4	+ 6,1	+ 7,5	+ 19,2					+ 4,3
16,9				+ 9	+ 24	+ 60	+ 67	+ 47	+ 19	+ 3					+ 234
17,0—			+ 4,4	+ 4,4	+ 2,8	+ 2,0	+ 2,2	+ 4,1	+ 6,7	+ 8,5	+ 9,1	+ 12,4			+ 4,1
19,9			+ 1		+ 8	+ 33	+ 52	+ 49	+ 33	+ 20	+ 9	+ 1			+ 206
20,0—					+ 12,9	+ 1,6	+ 0,6	+ 3,6	+ 3,5	+ 5,5	+ 5,6	+ 5,6	+ 8,6		+ 3,6
22,9					+ 2	+ 11	+ 26	+ 43	+ 53	+ 28	+ 20	+ 1			+ 184
23,0—						+ 21,8	+ 1,8	+ 1,8	+ 2,6	+ 3,7	+ 5,1	+ 13,5	+ 6,6		+ 2,9
25,9						+ 1	+ 10	+ 26	+ 27	+ 32	+ 17	+ 1	+ 1		+ 125
26,0—							+ 8,5	+ 6,8	+ 2,7	+ 5,0	+ 2,3	+ 0,2			+ 4,0
28,9							+ 3	+ 12	+ 17	+ 15	+ 15	+ 3			+ 65
29,0—								+ 4,4	+ 7,4	+ 1,1	+ 7,7	+ 1,3	+ 8,6		+ 4,3
31,9								+ 3	+ 5	+ 9	+ 13	+ 1	+ 2		+ 33
32,0—										+ 2,6	+ 3,1	+ 0,7			+ 1,4
34,9										+ 2	+ 1	+ 2			+ 5
35,0—										+ 0,4	+ 8,4	+ 10,1			+ 0,1
37,9										+ 2	+ 4	+ 3			+ 10
38,0—											+ 2,9	+ 2,9			+ 4,7
40,9											+ 3	+ 3			+ 4
41,0—										+ 4,9	+ 5,2				+ 5,1
43,9										+ 1	+ 2				+ 3
Sum	+ 1,2	+ 2,0	+ 1,8	+ 5,1	+ 3,3	+ 5,4	+ 5,1	+ 4,6	+ 4,6	+ 5,9	+ 6,1	+ 1,1	+ 7,9	+ 4,6	+ 1 353
	7	30	52	112	155	207	217	189	168	114	87	12	3		

Diameterklasser — Diameter classes



Tabell 5. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når vanlig bjørk fra hele landet er kubert med Näslands funksjon for hele Sverige.

*Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of Betula pubescens from all districts is calculated with Näslands greater function.*

Diameterklasser — Diameter classes	Høydeklasser — Height classes												Sum
	3,0— 4,9	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	25,0— 26,9	
5,0—	—0,6	—8,9	0,0	—2,1	+ 0,2	13,0—	15,0—	17,0—	19,0—	21,0—	23,0—	25,0—	—3,4
7,9	2	33	41	18	4	14,9	16,9	18,9	20,9	22,9	24,9	26,9	98
8,0—		—6,0	—8,3	+ 0,3	—0,6	0,0	+ 10,1	18,9	+ 0,4				—1,4
10,9		6	21	47	42	17	3	18,9	19,9				136
11,0—			—2,0	—4,3	—1,4	+ 0,2	—2,5	+ 11,2					—1,3
13,9			5	17	52	39	10	1					124
14,0—			—8,6	—2,4	—3,9	—2,2	—1,1	—3,0					—2,7
16,9			2	4	23	31	16	7					83
17,0—				+ 0,2	—5,5	—4,4	—1,9	—3,6	+ 0,4				—3,3
19,9				1	13	14	24	9	+ 0,2				63
20,0—				—14,2	—11,6	+ 1,0	—2,4	—4,9	+ 0,2				—3,4
22,9				2	1	5	8	17	7				40
23,0—					1	—1,4	—3,0	—3,2	—6,1	—2,4			—3,5
25,9						1	2	3	2	1			9
26,0—				—8,2	—8,2	—14,0	—3,1	+ 0,1	—6,1				—4,7
28,9				2	2	1	1	3	2				7
29,0—				—5,2	—5,2	1	—13,0			+ 6,8	+ 6,3		+ 0,3
31,9				1	1		1			1	2		5
32,0—												—10,2	—10,2
34,9												2	2
Sum	—0,6	—8,5	—3,0	—1,5	—2,1	—1,2	—1,5	—3,4	—0,9	+ 2,2	+ 6,3	—10,2	—2,4
	2	39	69	89	138	108	65	40	11	2	2	2	567

vil overkuberingen avta med økende dimensjon, og for gruppene M, Ms og Mn vil underkuberingen bli mindre når dimensjonen øker.

Rudens tabell har for datagruppene A, (L+Ms) og L gitt en økende overkubering med stigende dimensjon, bortsett fra gruppen over 700 dm<sup>3</sup> som bare er svakt overkubert. De 27 store trærne faller meget godt sammen med alle tabeller.

Sammenligningen av de forskjellige tabeller med dette materiale har vist at kubering etter Rudens tabell gir en overkubering som i middel for hele materialet er 2.23 %. Overkuberingen øker med stigende dimensjon. Lavlandsbjørk blir overkubert med 3.96 %, mens vanlig bjørk blir underkubert med

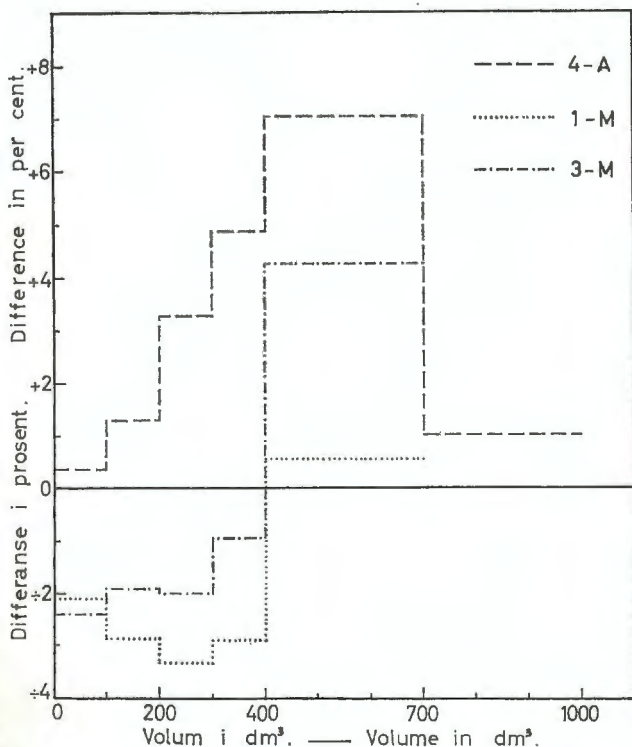
Tabell 7. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær innen forskjellige volumklasser for ulike materialgrupper og volumtabeller.

*Average difference in % and number of samples for various volume classes for different groups of data and volume tables.*

Gruppene <i>The groups</i>	Volumklasser — <i>Volume classes</i>					
	0—100 dm <sup>3</sup>	100—200 dm <sup>3</sup>	200—300 dm <sup>3</sup>	300—400 dm <sup>3</sup>	400—700 dm <sup>3</sup>	> 700 dm <sup>3</sup>
4 - A	+ 0,37 788	+ 1,30 357	+ 3,27 238	+ 4,90 210	+ 7,04 205	+ 1,00 % 23 n
1 - (L + Ms)	+ 2,96 675	+ 2,91 383	+ 3,37 236	+ 3,66 207	+ 3,99 212	+ 0,05 % 27 n
2 - (L + Ms)	+ 3,75 675	+ 3,21 383	+ 3,37 236	+ 3,30 207	+ 3,09 212	- 1,05 % 27 n
4 - (L + Ms)	+ 1,07 645	+ 1,31 329	+ 2,94 230	+ 4,95 209	+ 7,18 205	+ 1,00 % 23 n
1 - L	+ 5,32 432	+ 4,56 301	+ 4,65 200	+ 4,21 191	+ 4,10 204	+ 0,92 % 25 n
2 - L	+ 6,24 432	+ 5,00 301	+ 4,73 200	+ 3,88 191	+ 3,26 204	- 0,88 % 25 n
4 - L	+ 2,52 404	+ 2,75 248	+ 3,83 193	+ 5,98 193	+ 6,94 197	+ 0,77 % 23 n
3 - M	- 2,39 386	- 1,90 110	- 2,00 44	- 0,96 17	+ 4,27 8	% n
1 - M	- 2,10 386	- 2,86 110	- 3,32 44	- 2,89 17	+ 0,56 8	% n
1 - Mn	- 3,54 143	- 1,98 28	- 1,46 8	- 3,12 1		% n
3 - Mn	- 3,49 143	- 0,13 28	+ 1,72 8	+ 0,40 1		% n

2.17 %. Kubering etter Näslands funksjoner vil gi over- og underkubering ved de samme tilfeller som etter Rudens tabell, men med Näslands funksjoner vil en imidlertid få en relativt bedre kubering når dimensjonen øker. Ved bruk av Näslands tabeller må en være klar over at de gir treets volum over stubben når tabellinngangen er diameter ved 1.3 meter og treets høyde over marken. Nyttets høyde over stubben, som er vanlig i Norge, vil Näslands tabeller gi ca. 1 % overkubering. Ved sammenligningen er det tatt hensyn til dette forhold, idet treets høyde over marken er brukt som inngang i Rudens tabell.

Hensikten med denne sammenligning har vært å undersøke om en eller



Figur 2. Gjennomsnittlig differanse i % for de forskjellige volumtabeller og materialgrupper for ulike volumklasser.

4 — A: Rudens tabell. Hele materialet.

1 — M: Näslands større funksjon for hele Sverige. Vanlig bjørk fra hele landet.

3 — M: Näslands større funksjon for Nord-Sverige. Vanlig bjørk fra hele landet.

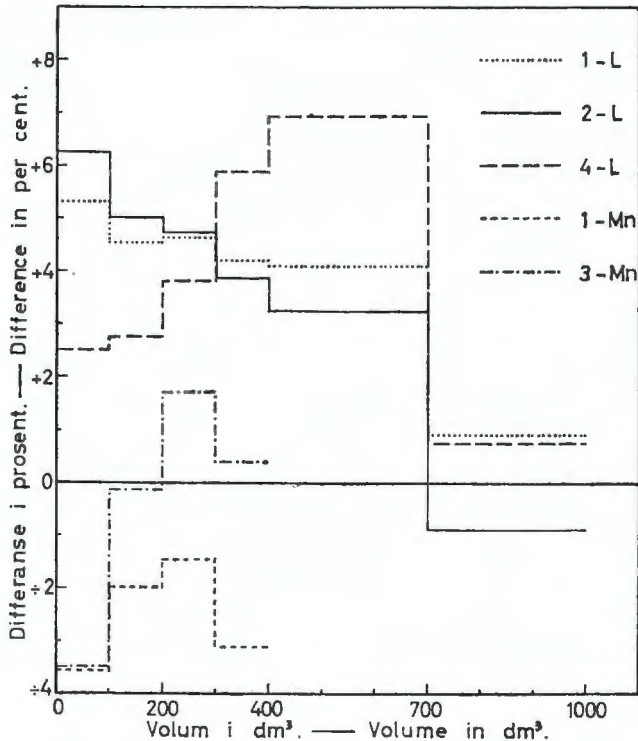
*Average difference in % for different volume tables and groups of data for various volume classes.*

4 — A: Rudens table. All trees.

1 — M: Näslands greater function for whole Sweden. All B. pubescens.

3 — M: Näslands greater function for the North-Sweden. All B. pubescens.

flere av disse tabellene vil passe så godt for det samlede norske materiale at det var unødvendig å beregne nye volumtabeller for bjørk. De avvikelser som sammenligningene viser er ikke avskrekkende, men likevel så store at det er funnet riktig å beregne nye norske volumtabeller for bjørk.

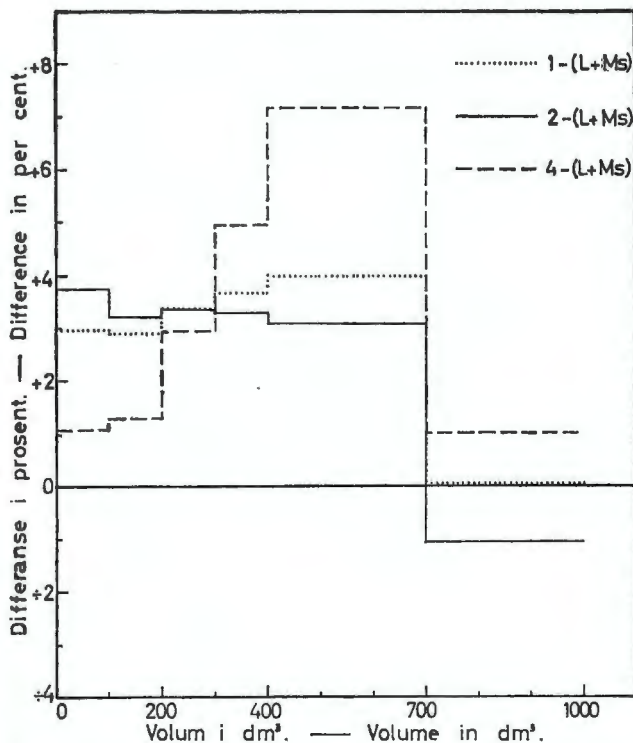


Figur 3. Gjennomsnittlig differanse i % for de forskjellige volumtabeller og materialgrupper for ulike volumklasser.

- 1 — L : Näslunds större funksjon for hele Sverige. Lavlandsbjørk.
- 2 — L : Näslunds större funksjon for Sør-Sverige. Lavlandsbjørk.
- 4 — L : Rudens tabell. Lavlandsbjørk.
- 1 — Mn: Näslunds större funksjon for hele Sverige. Vanlig bjørk fra Trøndelag og Nord-Norge.
- 3 — Mn: Näslunds större funksjon for Nord-Sverige. Vanlig bjørk fra Trøndelag og Nord-Norge.

*Average difference in % for different volume tables and groups of data for various volume classes.*

- 1 — L : Näslunds greater function for whole Sweden. *B. verrucosa*.
- 2 — L : Näslunds greater function for the South-Sweden. *B. verrucosa*.
- 4 — L : Rudens table. *B. verrucosa*.
- 1 — Mn: Näslunds greater function for whole Sweden. *B. pubescens* from Trøndelag and North-Norway.
- 3 — Mn: Näslunds greater function for the north of Sweden. *B. pubescens* from Trøndelag and North-Norway.



Figur 4. Gjennomsnittlig differanse i % for de forskjellige volumtabeller og materialgrupper for ulike volumklasser.

- 1 — (L+Ms): Näslunds större funksjon for hele Sverige. Lavlandsbjørk og vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet.  
 2 — (L+Ms): Näslunds större funksjon for Sør-Sverige. Lavlandsbjørk og vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet.  
 4 — (L+Ms): Rudens tabell. Lavlandsbjørk og vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet.

*Average difference in % for different volume tables and groups of data for various volume classes.*

- 1 — (L+Ms): Näslunds greater function for whole Sweden. *B. verrucosa* and *B. pubescens* from Sørlandet and Østlandet.  
 2 — (L+Ms): Näslunds greater function for the south of Sweden. *B. verrucosa* and *B. pubescens* from Sørlandet and Østlandet.  
 4 — (L+Ms): Rudens table. *B. verrucosa* and *B. pubescens* from Sørlandet and Østlandet.

## IV. Beregning av funksjoner for volumet på bark

### A. Metodikk

#### 1. Grafisk og numerisk utjamning

Ved beregning av volumtabeller er det flere fremgangsmåter å velge mellom. Først kan det skilles mellom grafisk og numerisk utjamning av grunnmaterialet. Med de regnetekniske muligheter vi disponerer i dag, er det naturlig at utjamningen foretas numerisk. Dvs. at det med regresjonsanalyse beregnes funksjoner for volumet med trærnes diameter, høyde, barktykkelse etc. som uavhengige variable.

#### 2. Volumfunksjoner

Spredningen i volumet øker med økende diameter og høyde. Dette kan føre til at de største dimensjoner i relativt sterkere grad enn de mindre dimensjoner vil bestemme regresjonskoeffisientene. Den beregnede funksjon kan av denne grunn falle utenfor eller i utkanten av materialet for de små dimensjoner. Hvor sterkt dette vil gjøre seg gjeldende, avhenger blant annet av materialets størrelse og av forholdet mellom små og store dimensjoner innen materialet. På grunn av dette forhold kan det enkelte ganger bli nødvendig å beregne en funksjon for små trær og en funksjon for større trær.

#### 3. Formtallsfunksjoner

I stedet for å beregne volumet direkte som funksjon av diameter, høyde, bark etc., kan det først beregnes en funksjon for formtallet. Denne formtallsfunksjon kan deretter multipliseres med  $\frac{\pi}{4} d^2 h$  og transformeres dermed til en volumfunksjon.

Formtallet vil for et materiale variere fra ca. 1,300 for de minste trærne (2.5 cm — 2.5 meter) til ca. 0.400 for de største trærne (40 cm — 30 meter). Spredningen i formtallet vil være størst for de minste diameter og høyder, og synker med økende diameter og høyde. Ved beregning av formtallsfunksjoner vil derfor de små trærne i for stor grad kunne bestemme regresjonskoeffisientene.

#### 4. Regresjoner med vektorer

Som nevnt vil spredningen i volumet øke med økende diameter og høyde, og dette kan påvirke regresjonskoeffisientene slik at funksjonen gir en dårlig tilpassing for de minste dimensjoner. For å motvirke dette forhold kan det beregnes regresjoner med vektorer. Slike regresjoner er beskrevet av STRAND (1958), GEDNEY and JOHNSON (1959) og CUNIA (1964).

For hele grunnmaterialet er det beregnet en volumfunksjon på grunnlag

av en regresjonsanalyse med vektorer. Vektene er funnet av grunnmaterialet ved at spredningen ( $S^2$ ) for volumet er beregnet innen alle diameter- og høydeklasser.

$$S^2(i, j) = \frac{\sum V^2(i, j) - \frac{\sum (V(i, j))^2}{n(i, j)}}{n(i, j) - 1}$$

De beregnede verdier for  $S^2(i, j)$  er grafisk utjamnet over diameter og høyde. Av de utjammede verdier er vektene beregnet slik:

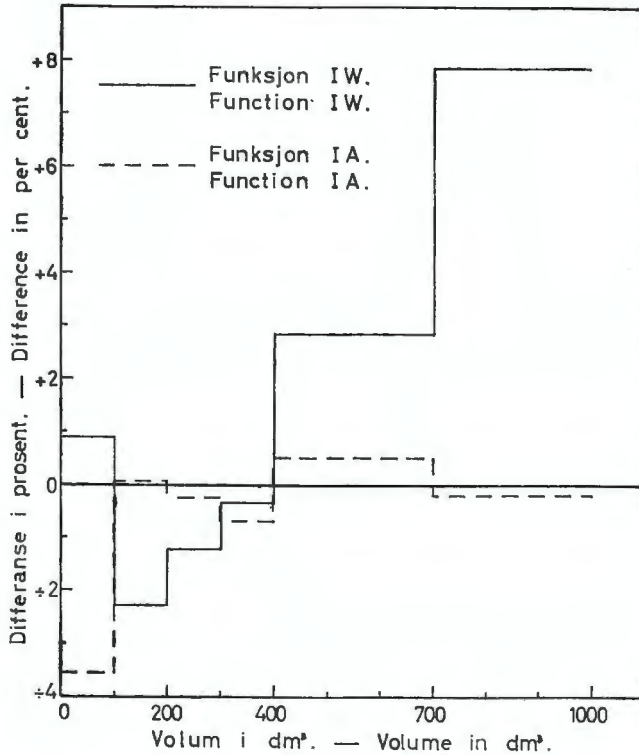
$$W(i, j) = \frac{1}{S^2(i, j)}$$

Spredningen øker med økende dimensjon, og vektene vil derfor bli store for de minste dimensjonene og avta med økende dimensjon. De beregnede vektene varierer fra 7000 for den minste dimensjonen til 1 for den største dimensjonen.

I regresjonsanalysen er summer og kvadratsummer for hvert prøvetre multiplisert med dimensjonens vekt.

Funksjon I W som har variablene  $d^2$ ,  $d^2h$ ,  $dh^2$  og  $h^2$ , er beregnet etter denne metode på grunnlag av hele grunnmaterialet. Funksjon I A som har de samme variablene som I W, er beregnet på grunnlag av hele grunnmaterialet, men med vanlig regresjonsanalyse uten vektorer. Begge funksjonene er testet mot grunnmaterialet for å studere hvordan funksjonene kuberer de forskjellige dimensjoner. Resultatet av denne test er satt opp i fig. 5. Av denne figuren går det fram at funksjon I W har kubert trær mindre enn  $100 \text{ dm}^3$  bedre enn funksjon I A, men for de øvrige dimensjoner har funksjon I A gitt de minste differanser. For volumkassen  $100 \text{ dm}^3$  har funksjon I A gitt en relativt sterkt underkubering. Ved nærmere analyse viser det seg at dette skyldes trær mindre enn  $10 \text{ dm}^3$ , som blir underkubert med ca. 50 %. Av fig. 5 går det videre fram at funksjon I W gir en sterkt økende overkubering med økende dimensjon.

Bruk av regresjoner med vektorer på den måten som er beskrevet her, fører til at de små trærne får en sterkere innflytelse på regresjonen. Dette skulle oppveie det forhold at spredningen i volumet øker med økende diameter og høyde. Ved beregning av regresjoner med vektorer på dette materialet, har det vist seg at volumfunksjoner ga en dårligere tilpassing til grunnmaterialet enn samme funksjonstype beregnet uten vektorer. En mulig forklaring på dette resultat kan ligge i grunnmaterialets sammensetning av små og store trær. Av tabellene 1, 2 og 3 går det fram at grunnmaterialet har mange småtrær og relativt få store trær. Ved bruk av vektorer har småtrærnes innflytelse på bestemmelsen av regresjonskoeffisientene blitt for stor. I det videre arbeide med



Figur 5. Differanse i % mellom funksjon I W og virkelig volum og mellom funksjon I A og virkelig volum.

*Difference between function I W and real volume and between function I A and real volume.*

beregninger av volumfunksjoner på grunnlag av dette materialet, vil regresjonsanalyse uten vektorer bli benyttet.

### B. Funksjonene

I funksjonene er følgende variable benyttet:

- |           |             |
|-----------|-------------|
| 1: $d^2$  | 6: $dhb$    |
| 2: $d^2h$ | 7: $d^2b$   |
| 3: $dh^2$ | 8: $b/d$    |
| 4: $h^2$  | 9: $d_6^2h$ |
| 5: $d^2k$ | 10: $V m/b$ |

d: Diameter på bark ved 1.3 meter (cm)  
*Diameter outside bark at 1.3 meter (cm)*

b: Dobbel bark ved 1.3 meter (mm)  
*Double bark at 1.3 meter (mm)*



- h: Treets høyde over stubben (m)  
*Treeheight above the stump (m)*
- k: Kronehøyde (m)  
*The height to the first green branches (m)*
- $d_6$ : Diameter på bark ved 6 meter (cm)  
*Diameter outside bark at 6 meter (cm)*
- V u/b: Volum med bark (1/10 dm<sup>3</sup>)  
*Volume including bark (1/10 dm<sup>3</sup>)*
- V u/b: Volum under bark (1/10 dm<sup>3</sup>)  
*Volume under bark (1/10 dm<sup>3</sup>)*

For hele materialet under ett er det beregnet en rekke volumfunksjoner der variablene er prøvd i flere kombinasjoner. Variablene  $d_6^2h$  og  $d^2$  er sterkest korrelert med volumet. En funksjon med disse to variablene alene gir en residualspreddning på  $\pm 9.2$  dm<sup>3</sup>. Variablene  $d^2b$ ,  $d^2k$ ,  $d^2h$  og  $d_6h$  gir alle en signifikant senkning av residualspreddningen på 5 % nivået, men samlet synker residualspreddningen bare 1.1 dm<sup>3</sup> om disse fire variablene tas med i tillegg til  $d_6^2h$  og  $d^2$ .

Variabelen  $d_6h^2$  er meget god, men den er også relativt arbeidskrevende å bestemme, og lite hensiktsmessig for praktisk bruk. Det er derfor nødvendig å beregne funksjoner der  $d_6^2h$  ikke er med.

I en funksjon hvor alle variablene unntatt  $d_6^2h$  er med, viser det seg også at variabelen  $d^2k$  senker residualspreddningen ubetydelig. Det er derfor ikke nødvendig å ta med noen variabel som beskriver kronehøyden.

Av barkleddene er  $d^2b$  det beste. Barkleddet er sterkt signifikant og nøyaktigheten vil avta betydelig om det utelates.

For hele materialet ble følgende funksjonstyper nærmere vurdert:

$$\text{I A: } Vm/b = -18,6827 + 2,1461 d^2 + 0,1283 d^2h + 0,1380 dh^2 - \\ 0,6311 h^2 \\ \bar{R} = 0,9902 \quad \bar{S} = \pm 22,85 \text{ dm}^3 ): \pm 17,1 \%$$

$$\text{II A: } Vm/b = -12,5409 + 1,2739 d^2 + 0,3166 d^2h + 0,009752 dh^2 - \\ 0,1226 h^2 - 0,04214 d^2b \\ \bar{R} = 0,9946 \quad \bar{S} = \pm 16,95 \text{ dm}^3 ): \pm 12,7 \%$$

For å studere hvordan funksjonene kuberer ulike dimensjoner innen grunnmaterialet, er de gjennomsnittlige differanser i % beregnet for hver

diameter- og høydeklasse. Materialet er delt i diameterklasser med 2 cm's intervall og høydeklasser med 2m's intervall. Beregningene er utført på grunnlag av klassens midlere volum, men for diameter, bark og høyde er klassemitt benyttet. Den gjennomsnittlige differanse innen hver volumklasse er fremkommet ved at den prosentiske differansen for hver diameter- og høydeklasse er summert med klassens antall som vektor. Tabell 8 viser resultatet av disse beregningene for funksjon I A og II A.

Tabell 8. Gjennomsnittlig differanse i % for ulike volumklasser. Funksjon I A og II A er testet mot grunnmaterialet.

*Average difference in % for different volume classes. The functions I A and II A are tested on the basic material.*

Volumklasser <i>Volume classes</i> dm <sup>3</sup>	Antall trær <i>Number of trees</i>	Differanse i % <i>Difference in %</i>	
		I A	II A
<100 .....	1 997	-3,56	-0,11
100—200 .....	504	+0,07	-0,05
200—300 .....	312	-0,24	-0,10
300—400 .....	240	-0,69	+0,07
400—700 .....	220	+0,51	+0,11
>700 .....	30	-0,19	+0,66
Sum .....	3 303	-2,18	-0,06

I denne beregningen er 10 trær mindre enn 3 cm holdt utenfor. Disse småtrærne blir underkubert meget sterkt både med funksjon I A (ca. 50 %) og med II A (ca. 30 %).

Av denne tabellen går det fram at funksjonen I A underkuberer trær mindre enn 100 dm<sup>3</sup>, men for de øvrige klassene er avvikene små. For funksjon II A er avvikene små for alle volumklasser. Det går fram av tabellen at barkleddet ikke har noen tydelig effekt ved disse beregningene. Dette kommer av at det ved beregningene er brukt barktykkelsens midlere verdier innen hver klasse, og effekten av de store og små barktykkelser vil derfor elimineres.

Funksjonene I A og II A er også testet mot de 311 trær som er disponert som testmateriale. Beregningsmåten ved denne testingen er den samme som ble brukt ved testing av Rudens og Näslunds volumtabeller. Dvs. at for hvert enket tre er differensen mellom treets virkelige volum og funksjonens verdi regnet i % av virkelig volum.

Tabell 9 viser de gjennomsnittlige differanser i % for 12 volumklasser når funksjon I A og II A kuberer testmaterialet. Det viser seg at funksjon II A kuberer de største dimensjonene bedre enn funksjon I A. Det kan forklares med at med økende dimensjon øker også barkens variasjon sterkt og barkleddet får derfor økende betydning.

Tabell 9. Gjennomsnittlig differanse i % for ulike volumklasser. Funksjonene I A og II A er testet mot testmaterialet.  
Average difference in % for different volume classes. The function I A and II A are tested on the test data.

Volumklasser Volume classes dm <sup>3</sup>	Antall trær Number of trees	Differanse i % Difference in %	
		I A	II A
100— 100 .....	136	— 3,57	— 2,07
100— 200 .....	57	— 2,46	— 3,06
200— 300 .....	38	— 3,59	— 4,69
300— 400 .....	16	— 0,12	— 1,58
400— 500 .....	9	+ 2,39	+ 5,39
500— 600 .....	14	— 2,57	+ 2,14
600— 700 .....	14	— 2,43	+ 1,19
700— 800 .....	14	— 3,09	— 1,07
800— 900 .....	3	— 4,42	+ 3,63
900— 1 000 .....	3	+ 5,86	+ 3,68
1 000— 1 100 .....	6	— 6,57	— 2,32
1 100— 1 200 .....	1	— 8,30	+ 2,98
Sum .....	311	— 2,96	— 1,81

De mindre dimensjonene blir temmelig likt kubert med begge funksjoner, dog noe bedre med I A enn med II A, bortsett fra trær mindre enn 100 dm<sup>3</sup> som blir sterkere underkubert av I A enn av II A.

### C. Diameteren ved 6 meter

Ved beregning av volumtabeller for gran, furu og bjørk i Finnland har ILVESSALO (1947) brukt brysthøydiameter, høyde og diameter ved 6 meter som variable.

For lerk (*Larix sibirica* Ledeb. og *Larix decidua* Mill.) har VUOKILA (1960) i Finnland beregnet volumfunksjoner og volumtabeller. Her er også diameteren ved 6 meter tatt med som variabel.

I Østerrike har POLLANSCHÜTZ (1961) beregnet volumfunksjoner for gran på grunnlag av variablene, brysthøydiameter, høyde og diameter ved 3/10 av treets høyde regnet fra stubbeavskjær.

I forrige kapittel er det påvist at  $d_6^2h$  er en meget god variabel. Nedenfor er det gjengitt 5 forskjellige funksjoner som alle har  $d_6^2h$  som variabel.

Av denne beregningen går det fram at variablene  $dh^2$  og  $h^2$  uten videre kan sløyfes. Tallene viser videre at residualspreddningen bare øker med 0.12 dm<sup>3</sup> når variabelen  $d^2b$  tas bort. Det er altså meget lite å vinne med at barktykkelsen tas med som variabel når  $d_6^2h$  er med i funksjonen. Tidligere er det også påvist at barkleddet er av stor betydning når  $d_6^2h$  ikke er med som variabel i funksjonen. Dette resultat kan forklares med at variablene  $d^2b$

Tabell 10. Korrelasjonskoeffisient og residualspreddning for ulike volumfunksjoner.

*Correlationscoefficients and residualdeviation for different volume functions.*

Variablene						$\bar{R}$	$\bar{S}$ i $\text{dm}^3$
$d^2$	$d^2h$	$dh^2$	$h^2$	$d_6^2h$	$d^2b$		
*	*	*	*	*	*	0,9985	8,95
*	*			*	*	0,9985	8,97
*	*			*		0,9984	9,09
*				*		0,9984	9,23
				*		0,9946	16,97

og  $d_6^2h$  er relativt sterkt interkorrelerte. Dette betyr at begge variablene beskriver formen i nedre stammedel, men at  $d_6^2h$  er en mye bedre variabel enn  $d^2b$ .

Tabell 10 viser videre at dersom variabelen  $d^2h$  sløyfes, øker residualspreddningen med bare  $0.14 \text{ dm}^3$ , men om variabelen  $d^2$  også tas bort vil residualspreddningen øke betydelig.

En funksjon for volumet på bark når diameter ved 6 meter forutsettes målt, vil derfor få variablene:  $d^2$ ,  $d^2h$  og  $d_6^2h$ . Volumfunksjonen III A, med disse variable er:

$$\text{III A: } V \text{ m/b} = 32,52 + 2,407 d^2 - 0,02412 d^2h + 0,3849 d_6^2h$$

$$\bar{R} = 0,9985 \quad \bar{S} = \pm 0,09 \text{ dm}^3 \text{ ): } \pm 6,8 \%$$

Funksjon III A er også sammenholdt med de enkelte diameter- og høydeklasser innen testmaterialet. Resultatet er satt opp i tabell 11.

For alle diameter- og høydeklasser er avvikene små, og i gjennomsnitt er de 275 trær underkubert med  $-0.32 \%$ .

Tabell 11. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær. *Funksjon III A* er testet mot testmaterialet. *Average difference in % and number of samples. Function III A is tested on the test data.*

Høydeklasser — Height classes

	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	Sum
8	-7,6 3	+5,4 10	+3,9 16	+3,7 3									+3,3 32
10	-6,1 3	-4,9 6	+2,7 7	-4,4 3	-3,3 2								-2,3 21
12		-8,2 6	-1,5 11	+0,1 2	-2,8 5								-3,3 24
14	-14,5 1	-4,2 1	+0,2 4	+1,4 1	-1,4 6								-1,9 13
16	-9,0 2	-9,2 4	-4,8 13	+1,3 6	-0,7 9	+0,3 3							-3,1 37
18	-10,2 1	-13,7 1	-5,4 3	-0,4 9	-2,5 9	-1,4 5							-2,6 28
20			-3,9 2	-1,6 5	-0,8 5	+2,3 1			+4,0 1				-1,0 14
22	-13,7 1	-7,0 1	0 1	+0,4 3	+1,7 8	+0,8 3							-0,2 17
24			-0,2 1	-5,4 4	+3,6 3	+3,8 1	-2,4 2						-1,1 11
26					-0,7 2	+2,7 3	+3,0 4	-0,8 4					+1,0 18
28		+8,0 1					+1,5 1	+0,7 7			+4,9 1		+2,3 14
30					+7,1 1	+3,4 2		-1,8 2		+2,7 1			+1,6 13
32				-1,2 1			+3,4 2	+7,1 5		+0,2 1			+3,3 11
34								+6,2 2					-0,8 5
36							+2,1 1		+7,1 3	+0,3 1			+1,7 7
38							+8,2 1		+5,6 1	+6,2 2			+6,0 3
40								+6,8 4		+4,7 2			+6,4 7
Sum	-8,9 11	-2,6 30	-0,4 58	-0,7 37	-0,6 50	+1,0 18	+2,3 11	+3,1 24	+2,7 22	+3,6 7	-0,3 2	-6,8 5	-0,32 275

Diameterklasser — Diameter classes

### D. Gruppering av materialet

En del av beregningsmaterialet ble benyttet ved testing av Rudens volumtabell og Näslunds større volumfunksjoner. Ved denne testing ble det vist at både de svenske og den norske tabellen overkuberte lavlandsbjørk, mens vanlig bjørk ble nesten like mye underkubert. I Rudens tabell er det ikke tatt hensyn til barktykkelsen, så i dette tilfellet er det rimelig at tykkbarkedede stammer av lavlandsbjørk vil bli overkubert når volum på bark beregnes. Men i Näslunds større funksjon er barken med som variabel (dbh). Dette leddet i funksjonen har negativt fortegn. Ved samme diameter og høyde vil derfor volumet avta når barktykkelsen øker. Dette resultat tyder på at vanlig bjørk også under bark har bedre form enn lavlandsbjørk, eller at barkleddet dbh i funksjonen ikke klarer å korrigere for den variasjon i formen som en varierende barktykkelse forårsaker. Det er derfor beregnet særskilte funksjoner for de to treslag for å studere dette forhold nærmere.

Videre er grunnmaterialet delt i to geografiske områder. Den ene gruppen består av lavlandsbjørk og vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet (L + Ms), og den andre gruppen av vanlig bjørk fra Trøndelag og Nord-Norge (Mn). I alt er som anført materiale delt i 6 grupper.

(Se kapitel II. Side . . . .)

Innen hver av disse gruppene er det beregnet en rekke funksjoner, men for alle grupper er følgende funksjonstyper nærmere vurdert:

$$\text{I: } Vm/b = a + d^2 + d^2h + dh^2 + h^2$$

$$\text{II: } Vm/b = a + d^2 + d^2h + dh^2 + h^2 + d^2b$$

For å studere hvordan de forskjellige funksjoner kuberer de forskjellige grupper, er det benyttet en metode beskrevet av E. J. Williams s. 129 (WILLIAMS 1959). For funksjonene er det beregnet en rekke variansanalyser som bedømmer om det blir signifikant senkning av residualspreningen når materialet deles i to grupper, og samme funksjonstype beregnes for de to nye gruppene. Eksempel: Materialgruppe A deles i gruppene B og D. F-verdiene beregnes slik:

$$F_A - (B + D) = \frac{[(n_A - m) \cdot S^2_A - (n_B - m) \cdot S^2_B - (n_D - m) \cdot S^2_D] \cdot \frac{1}{m}}{[(n_B - m) \cdot S^2_B + (n_D - m) \cdot S^2_D] \cdot \left[ \frac{1}{n_A - 2m} \right]}$$

$n$  = Antall observasjoner  
*Number of observations*

$m$  = Antall variable  
*Number of variables*

$\bar{S}$  = Residualspredningen  
*The residual deviation*

For funksjonstypene I og II ga variansanalysene følgende resultat:

Materialgruppe	F-verdier	
	Funksjonstype I	Funksjonstype II
A deles i (L + Ms) og Mn .....	8,33***	4,80***
M deles i Ms og Mn .....	44,80***	24,82***
A deles i L og M .....	3,61***	7,38***
(L + Ms) deles i L og Ms .....	5,81***	5,69***

De beregnede F-verdier er alle signifikante på 1 % nivået. Dette tyder på at det kan vinnes noe ved å beregne særskilte funksjoner for følgende grupper:

L: Lavlandsbjørk

Ms: Vanligbjørk fra Sørlandet og Østlandet

Mn: Vanlig bjørk fra Trøndelag og Nord-Norge.

### 1. Geografisk gruppering

Variansanalysene viser at residualspreddingen blir signifikant mindre dersom det blir regnet en funksjon for Sørlandet og Østlandet og en for Trøndelag og Nord-Norge, istedenfor en felles funksjon for hele landet. Dvs. at materialgruppe A deles i (L+Ms) og Mn.

Materialgruppen fra Trøndelag og Nord-Norge består av 722 trær og har et gjennomsnittlig volum på 52.7 dm<sup>3</sup>. Bare 8 trær i dette materiale er større enn 22 cm — 15 m, eller ca. 250 dm<sup>3</sup>. For dette materialet ble barkleddet meget svakt signifikant, og den følgende funksjon er derfor valgt:

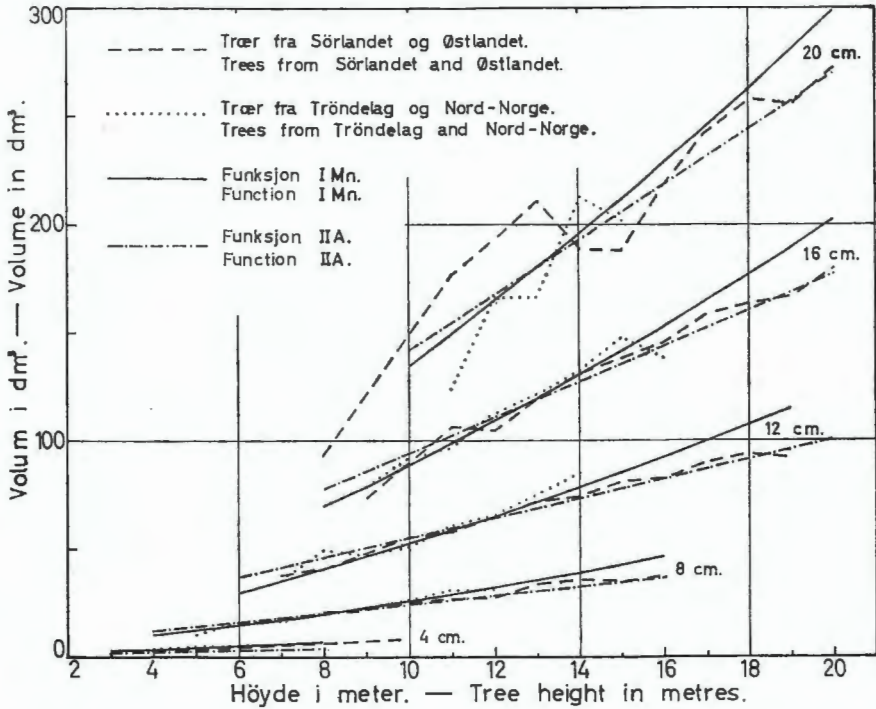
$$I \text{ Mn: } V_m/b = 9,9983 + 0,06325 d^2 + 0,2849 d^2h + 0,0885 dh^2 - 0,0799 h^2$$

$$\bar{R} = 0,9895 \quad \bar{S} = \pm 7,70 \text{ dm}^3): \pm 14,6 \%$$

Materialgruppen fra Sørlandet og Østlandet består av 2590 trær som har et gjennomsnittlig volum på 156.1 dm<sup>3</sup>, eller nær tre ganger så stort som materialgruppe Mn. Når volumfunksjoner beregnes av dette materialet, vil barkleddet bli meget sterkt signifikant. Følgende funksjon er valgt for denne gruppen:

$$II \text{ (L + Ms): } V_m/b = -10,5558 + 1,4413 d^2 + 0,3058 d^2h + 0,01898 dh^2 - 0,2578 h^2 - 0,04229 d^2b$$

$$\bar{R} = 0,9895 \quad \bar{S} = \pm 25,44 \text{ dm}^3): \pm 16,3 \%$$



Figur 6. Sammenligning mellom grunnmaterialet fra Sørlandet og Østlandet og fra Trøndelag og Nord-Norge, og mellom funksjon I Mn og II A.  
*Comparison between the basic material from Sørlandet and Østlandet and from Trøndelag and North-Norway and between function I Mn and II A.*

I figur 6 er materialet fra Trøndelag og Nord-Norge tegnet opp for en del diametre og høydeklasser, og materialet fra Sørlandet og Østlandet er tegnet inn for de samme klasser. Det går fram av denne figuren at det ikke er noen systematisk forskjell mellom disse to materialgruppene, og at de tilfeldige forskjeller også er meget små. I figur 6 er også funksjon I Mn tegnet inn sammen med materialgruppene (L+Ms) og Mn. Det viser seg da at funksjon I Mn kuberer både materialgruppe (L+Ms) og Mn meget godt innen det gyldige område for funksjonen, nemlig opp til 22 cm — 15 m. Ved større høyder enn 15 m vil funksjonen gi for stort volum. I figur 6 er også det beregnede volum av funksjon II A satt opp grafisk. I barkleddet i funksjon II A er barken satt lik diameterklassens gjennomsnittlige barktykkelse ( $b = 1.048 d$ ). Det går fram av denne figuren at funksjon II A kuberer materialgruppene meget godt. Bare for de helt minste diameterklasser vil funksjon I Mn være bedre enn funksjon II A.

Når variansanalysen viser at det blir en signifikant senkning av residualspredningen når hele materialet deles i gruppene (L+Ms) og Mn, kan ikke årsaken være at det er noen forskjell i formtallet for bjørk fra de to landsdeler, men at materialgruppene har forskjellige middeltall og at de har ulike



store variasjoner i d/h-forholdet. Materialgruppe Mn er et lite og meget homogent materiale som har små variasjoner i d/h-forholdet, og derfor vil funksjoner som beregnes av dette materialet få en liten residualspreddning.

Av disse beregningene kan det sluttet at det ikke er nødvendig å lage en volumfunksjon for Sørlandet og Østlandet og en funksjon for Trøndelag og Nord-Norge, fordi en funksjon som beregnes av hele materialet vil gi god kubering for alle landsdeler. Derimot viser beregningene at funksjon I Mn som er beregnet av et materiale med overveiende småtrær, gir bedre kubering av de minste dimensjonene enn funksjon II A. Funksjon I Mn kuberer også trær mindre enn 5 cm — 5 m tilfredsstillende nøyaktig.

## 2. Gruppering etter arter

Variansanalysene viser at residualspreddningen blir signifikant mindre dersom det beregnes en volumfunksjon for vanlig bjørk og en volumfunksjon for lavlandsbjørk.

Dvs. at materialgruppe (L+Ms) er delt i L og Ms, eller A er delt i L og M. Testene blir signifikante også om barken er med som variabel i funksjonene. Dette skulle tyde på at det innenfor barken er en forskjell i formen mellom lavlandsbjørk og vanlig bjørk, eller at barkleddet som tidligere nevnt ikke klarer å korrigere for den variasjon som barken forårsaker.

Nedenfor er funksjonene II L, II Ms og II M gjengitt:

$$\begin{aligned} \text{II L: } Vm/b &= -2,5835 + 1,0410 d^2 + 0,3289 d^2h + 0,0074 dh^2 - \\ & 0,1269 h^2 - 0,0428 d^2b \\ \bar{R} &= 0,997 \quad \bar{S} = \pm 21,5 \text{ dm}^3 ): \pm 11,2 \% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II Ms: } Vm/b &= -55,8773 + 2,0577 d^2 + 0,2787 d^2h - 0,0024 dh^2 + \\ & 0,1360 h^2 - 0,0403 d^2b \\ \bar{R} &= 0,996 \quad \bar{S} = \pm 9,4 \text{ dm}^3 ): \pm 11,9 \% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II M: } Vm/b &= -44,5425 + 1,4953 d^2 + 0,2867 d^2h + 0,0053 dh^2 \\ & 0,2666 h^2 - 0,0331 d^2b \\ \bar{R} &= 0,994 \quad \bar{S} = \pm 9,3 \text{ dm}^3 ): \pm 14,0 \% \end{aligned}$$

**Materialgruppe L**, lavlandsbjørk, består av 1761 stammer som har et midlere volum på 192.7 dm<sup>3</sup>, eller mer enn dobbelt så mye som gruppe Ms. Den største diameter er 44 cm, største høyde er 28 meter og største volum 1547 dm<sup>3</sup>. Se tabell 1.

**Materialgruppe Ms**, vanlig bjørk fra Sørlandet og Østlandet, består av 829 stammer som har et midlere volum på 78.6 dm<sup>3</sup>. Den største diameter i

materialet er 30 cm, største høyde er 22 meter og største volum er ca. 589 dm<sup>3</sup>. Se tabell 2.

I figur 1 er materialgruppe L og Ms tegnet inn for de dimensjoner som er representert av begge grupper. Av denne figuren går det fram at vanlig bjørk har et større volum enn lavlandsbjørk med samme diameter på bark og samme høyde. Dette resultat er en følge av at lavlandsbjørk ofte har tykk skorpebark. Ved samme diameter på bark og samme høyde vil vanlig bjørk ha bedre form enn lavlandsbjørk med skorpebark.

Det materialet som ble testet mot Rudens volumtabell og Näslunds valumfunksjoner, 1253 trær av lavlandsbjørk og 567 trær av vanlig bjørk, er på samme måte testet mot funksjonene II L, II M og II A.

Tabell 12 viser de gjennomsnittlige differanser i % mellom virkelig og beregnet volum når lavlandsbjørk kuberes med funksjon II L. Tabellen forteller at funksjon II L systematisk underkuberer trær i dette materialet som er mindre enn 17 cm — 23 m, mens større trær blir tilfredsstillende nøyaktig kubert.

Tabell 13 viser de gjennomsnittlige differanser i % når vanlig bjørk fra hele landet kuberes med funksjon II M. Også av denne beregning går det fram at de minste trærne blir sterkt underkubert. De større dimensjoner blir relativt nøyaktigere kubert, dog med tendens til overkubering.

Tabell 14 viser de gjennomsnittlige differanser i % når lavlandsbjørk kuberes med funksjon II A. Av denne tabellen går det fram at både små og store dimensjoner kuberes relativt like nøyaktig. Det er imidlertid en tendens til en svak men systematisk underkubering av de største dimensjoner. I middel blir alle klasser overkubert med 1 %.

Tabell 15 viser de gjennomsnittlige differanser i % når vanlig bjørk kuberes med funksjon II A. Denne tabellen viser også at små og store dimensjoner kuberes relativt like nøyaktig, men det er en tendens til en noe sterkere underkubering av de minste dimensjonene. I gjennomsnitt blir alle klasser underkubert med 2.1 %.

Disse beregningene viser at funksjon II L som er beregnet på grunnlag av materialgruppe L, lavlandsbjørk, gir mindre nøyaktig kubering av de 1353 lavlandsbjørker i testmaterialet enn funksjon II A som er beregnet med det totale antall lavlandsbjørk og vanlig bjørk. Videre forteller beregningene at funksjon II M som er beregnet av materialgruppe M, dvs. vanlig bjørk fra hele landet, gir dårligere kubering av de 567 bjørker i testmaterialet enn den generelle funksjonen II A.

Beregningene gir for øvrig beskjed om at funksjonene II L og II M ikke gir bedre kubering av henholdsvis gruppene lavlandsbjørk og vanlig bjørk enn den generelle funksjon II A. Men det går fram av tabell 14 og 15 at funksjon

Høydeklasser — Height classes

	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	25,0— 26,9	27,0— 28,9	29,0— 30,9	Sum
5,0—	—21,3	—16,1	—12,8	—6,8	—10,3	—0,3	+1,7	—6,4	—0,3	+8,8	+3,8	—0,7	—29,0	—13,0
7,9	7	24	31	19	3	22	7	1						84
8,0—	—0,9	6	—6,8	—3,2	—2,5	—0,3	+1,7	—1,9	—0,3					—2,9
10,9			26	57	45	1,0	—0,1	9						164
11,0—			—0,8	—2,6	—3,1	74	46	—1,5	—0,3					—1,7
13,9			3	29	74	—1,9	—2,0	44	16	+8,8	+3,8			236
14,0—			—1,2	—1,2	—1,8	65	66	—0,2	—3,3	+6	+2			—1,6
16,9			+4,3	9	26	+0,4	—0,1	44	16	+0,2	—1,6	—0,7		—0,2
17,0—			2	4,3	—4,1	35	53	45	+0,4	+21	7	1		206
19,9					10	+0,9	—0,7	+0,6	—1,1	+0,8	—2,6	—9,3		—0,3
20,0—					+11,7	11	28	48	53	+25	16	1		184
22,9					2	+6,0	—4,1	—0,8	—0,3	+0,2	+0,2		—13,2	—0,6
23,0—						1	11	28	40	+28	16		—1	125
25,9							+6,8	+4,4	+0,3	+1,5	—1,2	—10,3		+1,0
26,0—							3	13	18	14	15	2		65
28,9								+2,0	+2,6	—0,1	+2,2		—12,5	+0,6
29,0—									5	11	12	—2,6	2	33
31,9										+0,2	+0,6	—2,6		—0,3
32,0—										2	1	2		5
34,9										—3,6	+3,9	—11,1	3	—2,9
35,0—										3	4	3		10
37,9									—7,9		+0,4	—		—2,3
38,0—									1		+0,4	—		4
40,9										+3,8	+0,4	—		+1,6
41,0—										1	2	—		3
43,9														
Sum	—21,3	—13,0	—9,6	—3,4	—2,6	—0,8	—0,8	—0,1	—0,6	+0,9	—0,2	—7,7	—12,8	—1,8
	7	30	60	116	160	208	214	191	166	111	78	9	3	1 353

Diameterklasser — Diameter classes

Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of *Betula verrucosa* is calculated with function II L.

er kubert med funksjon II L.

Tabell 13. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når vanlig bjørk fra hele landet er kubert med funksjon II M.  
*Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of Betula pubescens is calculated with function II M.*

Diameterklasser	Høydeklasser — Height classes											Sum	
	3,0— 4,9	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9		25,0— 26,9
5,0—	—25,4	—23,3	—6,4	—4,0	+0,4	+0,2	+12,4						—12,0
7,9	4	32	40	18	4								98
8,0—		—3,4	—4,9	+2,7	+0,9	18	+12,4						+0,6
10,9		7	20	51	38	+1,2	2						136
11,0—			+5,0	+1,4	+1,9	+4,2	—3,7	+8,7					+1,5
13,9			5	20	49	+0,2	7	—4,6	1				124
14,0—			—2,1	+3,4	+0,6	+0,2	—0,8	—4,6					—0,2
16,9			2	5	22	31	16	7					83
17,0—				+5,1	—0,3	+0,4	—2,1	—3,9	—6,5				—1,3
19,9				1	15	15	21	10	1				63
20,0—				—9,6	—7,5	+4,7	—1,1	—4,5	—2,0				—2,5
22,9				2	1	5	9	17	6				40
23,0—						+0,8	—1,0	—4,0	—6,5	—5,3			—3,2
25,9						1	2	4	1	1			9
26,0—					—8,3	—12,2	—1,2	+0,8					—4,0
28,9					2	1	1	3					7
29,0—					—4,1		—10,6		+5,7		+3,1		—0,6
31,9					1		1		1		2		5
32,0—												—13,6	—13,6
34,9												2	2
Sum	—25,4	—19,7	—5,0	+1,0	+0,9	+0,7	—1,4	—3,6	—2,1	—5,3	+3,1	—13,6	—2,1
	4	39	67	97	132	113	59	42	9	1	2	2	567

Tabell 14. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser nå lavlandsbjørk er kubert med funksjon II A.

Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of *Betula verrucosa* is calculated with function II A.

Diameterklasser — Diameter classes	Høydeklasser — Height classes												Sum
	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	25,0— 26,9	27,0— 28,9	
5,0—	-1,3	-1,8	-1,3	+2,0	-3,3	+4,0	+5,3	-3,5	+1,6	+10,0	+4,8		-0,8
7,9	7	24	31	19	3	22	7	1	1		2		84
8,0—		+8,2	+0,3	+2,4	+2,4	+4,0	+2,5	+0,2	+1,6				+2,6
10,9		6	26	57	45	74	46	9	1				164
11,0—			+4,6	+1,8	+0,4	+2,1	+2,5	+0,2					+1,6
13,9			3	29	74	74	46	9	1				236
14,0—				+2,6	+1,2	+0,5	0	+0,2	-2,0	+10,0	+4,8		+0,6
16,9				9	26	65	66	44	16	6	2		234
17,0—				+7,4	-1,4	+2,5	+1,5	+1,5	+1,4	+0,9	-1,0	-0,2	+1,4
19,9				2	10	35	53	45	32	21	7	1	206
20,0—					+14,6	+3,0	+0,7	+1,7	-0,4	+1,4	-2,3	-9,1	+0,7
22,9					2	11	28	48	53	25	16	1	184
23,0—						+9,5	-2,7	+0,2	+0,4	+0,7	+0,5	-13,4	+0,1
25,9						1	11	28	40	28	16	1	125
26,0—							+8,2	+5,3	+1,0	+2,0	-0,9	-10,3	+1,6
28,9							3	13	18	14	15	2	65
29,0—								+2,9	+3,4	+0,2	+2,3	-12,8	+0,9
31,9								3	5	11	12	2	33
32,0—										0	+0,6	-2,9	-1,1
34,9										2	1	2	5
35,0—										2	4	2	-2,8
37,9										3	4	3	10
38,0—										3	+4,1	-11,4	-1,6
40,9											+0,2	4	4
41,0—											3	3	4
43,9											+0,5	2	+1,6
Sum	-1,3	+0,2	-0,3	+2,3	+1,1	+1,9	+1,1	+1,3	+0,2	+1,4	+0,1	-7,8	+1,0
	7	30	60	116	160	208	214	191	166	111	78	9	1 353

Tabell 15. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når vanlig bjørk fra hele landet er kubert med funksjon II A.  
*Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of Betula pubescens is calculated with function II A.*

Diameterklasser — Diameter classes	Høydeklasser — Height classes													Sum
	3,0— 4,9	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	25,0— 26,9	Sum	
5,0—	—6,0	—9,5	—1,9	—5,8	—6,0	—13,0—	15,0—	17,0—	19,0—	21,0—	23,0—	25,0—	—5,4	
7,9	4	32	40	18	4	14,9	16,9	18,9	20,9	22,9	24,9	26,9	98	
8,0—		—0,8	—4,7	+1,4	—2,2	—4,0	+6,4	—4,8					—1,3	
10,9		7	20	51	38	18	2	18					136	
11,0—			+4,2	0	+0,2	—1,1	—6,3	+4,8					—0,5	
13,9			5	20	49	42	7	1					124	
14,0—			—5,7	+1,4	—0,6	—0,9	—1,7	—5,9					—1,4	
16,9			2	5	22	31	16	7					83	
17,0—				0	—1,5	—0,1	—2,4	—3,9	—6,3				—1,9	
19,9				1	15	15	21	10	1				63	
20,0—				—12,3	—9,3	+4,6	—0,9	—4,1	—1,4				—2,4	
22,9				2	1	5	9	17	6				40	
23,0—						—1,4	—0,4	—3,0	—5,6	—3,9			—2,6	
25,9						1	2	4	1	1			9	
26,0—						—14,5	—1,5	+1,8					—5,3	
28,9					—13,2	1	3	3					7	
29,0—					2	1	1	1	+7,7		+3,9		—0,3	
31,9					—7,5	1	1	1	1		2		5	
32,0—					1		1				—11,9		—11,9	
34,9											2		2	
Sum	—6,0	—8,0	—2,4	—0,5	—1,4	—1,2	—2,2	—3,6	—1,4	—3,9	+3,9	—11,9	—2,1	
	4	39	67	97	132	113	59	42	9	1	2	2	567	

II A stort sett overkuberer lavlandsbjørk og gir en tilsvarende underkubering av vanlig bjørk. Av figur 1 går det fram at vanlig bjørk ved samme diameter og høyde har større volum enn lavlandsbjørk, dvs. bedre form enn lavlandsbjørken. Dersom denne forskjellen bare skyldes skorpebarken på lavlandsbjørk, skulle forskjellen elimineres ved barkleddet  $d^2b$  som i funksjonen har negativt fortegn, og derfor reduserer volumet med økende barktykkelse. Men de resultater som er gjengitt i tabell 14 og 15 forteller at barkleddet enten ikke klarer å korrigere for hele den variasjon som barken forårsaker, eller at vanlig bjørk også under bark har bedre form enn lavlandsbjørk.

Som tidligere nevnt vil spredningen i volumet øke sterkt med økende diameter og høyde. Dette vil forårsake at de større dimensjoner i relativt sterkere grad enn de små vil bestemme funksjonenes koeffisienter. Dette vil føre til at materialets sammensetning m.h.t. små og store dimensjoner i høy grad vil bestemme funksjonens koeffisienter. Når et grunnmateriale deles opp i undergrupper, kan det innen disse gruppene bli store forandringer i forholdet mellom små og store dimensjoner. Disse forandringer kan påvirke funksjonens koeffisienter så sterkt at det forhold som skal studeres, ved grupperingen blir forstyrret eller fullstendig overskygget. Som det går fram av tabellene 1, 2 og 3 har materialgruppene meget forskjellige middeltall og dimensjonssammensetning. Dette forhold kan være forklaringen på at det ikke blir noen positiv effekt av å beregne særskilte funksjoner for lavlandsbjørk og vanlig bjørk.

## V. Beregning av funksjoner for volumet under bark

De samme funksjonstyper som er forsøkt ved beregning av volumfunksjoner på bark, er også vurdert ved beregningene av funksjoner for volumet under bark.

En funksjon av typen

$$V_{u/b} = a + d^2 + d^2h + dh^2 + h^2 + d_6^2h + d^2b$$

$d$  = Brysthøydiameter under bark

$d_6$  = Diameter på bark ved 6 meter

vil for hele materialet gi en residualspreddning på  $\pm 8.22 \text{ dm}^3$ . Tas leddene  $h^2$  og  $dh^2$  bort, øker spredningen til  $\pm 8.26 \text{ dm}^3$ . Disse to leddene bidrar lite til å senke spredningen når leddene  $d^2h$  og  $d^2b$  er med i funksjonen. Tas videre barkleddet  $d^2b$  bort, øker spredningen til  $\pm 8.61 \text{ dm}^3$ . Dette betyr at barkleddet også i en funksjon for volumet under bark gir en svak signifikant senkning av residualspreddningen, men det er rimelig å anta at årsaken til dette mer må tilskrives  $d^2$  enn  $b$  i variabelen  $d^2b$ .

Tabell 16. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når lavlandsbjørk er kubert med funksjon I Au.  
Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of *Betula verrucosa* is calculated with function I Au.

		Høydeklasser — Height classes															
		5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	25,0— 26,9	27,0— 28,9	29,0— 30,9	Sum		
5,0—	—1,6														—1,3		
7,9	6	—3,4	—2,8	—2,8	+1,0	—0,8	+14,1								109		
8,0—		24	39	39	27	10	3								+3,4		
10,9		+13,0	+1,4	+1,4	+2,7	+2,6	+4,3								+192		
11,0—		4	15	15	58	60	36								+1,9		
13,9			+3,9	+3,9	+1,0	+0,8	+1,0								+277		
14,0—			3	3	26	65	87								+1,7		
16,9					+3,1	+0,7	+1,5								+247		
17,0—			4	4	4	22	58								+0,7		
19,9			7,2	7,2	+7,2	+5,3	+1,2								+232		
20,0—			1	1	1	2	21								—1,0		
22,9						+31,3	+3,3								171		
23,0—						1	3								—12,6		
25,9															1		
26,0—															+0,4		
28,9															75		
29,0—															—1,0		
31,9															21		
32,0—															—13,7		
34,9															2		
35,0—															+1,9		
37,9															10		
38,0—															—1,9		
40,9															8		
															—2,1		
															2		
															—0,2		
															2		
Sum	—1,6	—1,0	—1,4	+2,0	+2,0	+1,6	+2,0	+1,3	+0,8	0	+2,3	+1,6	—8,6	—13,3	+1,1		
	6	23	57	116	160	208	214	191	167	109	78	9	3	1	346		



Tabell 17. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når vanlig bjørk er kubert med funksjon I Au.  
Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of *Betula pubescens* is calculated with function I Au.

Diameterklasser — Diameter classes	Høydeklasser — Height classes											Sum
	3,0— 4,9	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	
5,0—	+ 10,0	÷ 4,0	- 0,7	- 2,5	- 4,9							25,0—
7,9	2	27	45	25	8							26,9
8,0—		+ 31,1	+ 3,3	+ 2,7	0	+ 7,9						
10,9		4	14	54	29	4						
11,0—			+ 8,7	+ 6,2	+ 2,2	+ 1,4	+ 0,6					
13,9			3	14	43	39	3					
14,0—			+ 11,0	+ 22,1	+ 3,0	- 1,1	- 5,9					
16,9			1	1	14	30	10					
17,0—				- 1,7	- 1,4	+ 1,8	- 3,5	+ 0,5				
19,9				2	9	12	17	3				
20,0—					+ 15,3	+ 3,1	- 8,9	- 6,6				
22,9					1	2	8	5				
23,0—					- 2,3	- 4,4	+ 2,3					
25,9					1	1	4					
26,0—					+ 6,4	- 13,2		+ 3,9				
28,9					1	1		1				
29,0—												
31,9												
Sum	+ 10,0	- 1,8	+ 0,8	+ 1,9	+ 0,8	+ 0,4	- 4,2	- 3,1	- 6,3	+ 7,8	- 5,2	0
	2	31	63	96	132	113	42	9	1	2	3	533

Tabell 18. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når lavlandsbjørk er kubert med funksjon I Lu.

Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of *Betula verrucosa* is calculated with function I Lu.

	Høydeklasser — Height classes													Sum
	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,9	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9	25,0— 26,9	27,0— 28,9	29,0— 30,9	
5,0—	+ 32,6	+ 14,4	+ 6,0	+ 3,3	- 2,8	+ 10,0								+ 7,9
7,9	6	24	39	27	10	3								109
8,0—		+ 25,5	+ 8,9	+ 6,8	+ 4,0	+ 3,8	+ 4,1	+ 4,5						+ 5,7
10,9		4	15	58	60	36	17	2						192
11,0—			+ 10,5	+ 5,4	+ 3,4	+ 3,1	+ 3,9	+ 2,0	- 3,4	+ 9,0	+ 20,8			+ 3,6
13,9			3	26	65	87	66	25	3	1	1			277
14,0—				+ 7,0	+ 3,5	+ 3,2	+ 1,6	+ 0,8	+ 3,4	+ 9,3	+ 11,0			+ 2,7
16,9			4	4	22	58	65	56	27	13	2			247
17,0—				+ 11,1	+ 7,9	+ 3,0	- 0,1	+ 2,0	+ 0,3	+ 2,8	+ 1,4	+ 2,2		+ 1,5
19,9			1	1	2	21	44	55	55	36	17			232
20,0—					+ 34,7	+ 5,4	- 1,3	+ 0,4	- 1,6	+ 0,4	- 0,4	- 9,9	- 12,5	- 0,4
22,9					1	3	18	35	54	32	26	1	1	171
23,0—							+ 1,7	- 1,2	+ 1,1	+ 2,3	+ 2,2	- 9,4		+ 0,8
25,9							3	16	23	17	14	2		75
26,0—							+ 0,2	+ 7,7	+ 6,9	- 4,3	- 0,4		- 13,7	- 0,8
28,9							1	2	3	5	8		2	21
29,0—									+ 1,4	+ 3,6	+ 5,0	- 5,5		+ 1,8
31,9									2	3	3	2		10
32,0—										- 8,8	+ 8,2	- 14,0		- 2,3
34,9										1	4	3		8
35,0—											- 2,6			- 2,6
37,9											2			2
38,0—										- 1,8	- 0,2			- 1,0
40,9									1	1	1			2
Sum	+ 32,6	+ 16,0	+ 7,0	+ 5,7	+ 3,5	+ 3,4	+ 1,9	+ 1,2	+ 0,4	+ 2,4	+ 1,6	- 8,8	- 13,3	+ 2,9
	6	28	57	116	160	208	214	191	167	109	78	9	3	1 346

Diameterklasser — Diameter classes

Tabell 19. Gjennomsnittlig differanse i % og antall prøvetrær for ulike diameter- og høydeklasser når vanlig bjørk er kubert med funksjon I Msu.

Average difference in % and number of samples for different diameter- and height classes when the volume of *Betula pubescens* is calculated with function I Msu.

Diameterklasser — Diameter classes	Høydeklasser — Height classes											Sum	
	3,0— 4,9	5,0— 6,9	7,0— 8,9	9,0— 10,9	11,0— 12,0	13,0— 14,9	15,0— 16,9	17,0— 18,9	19,0— 20,9	21,0— 22,9	23,0— 24,9		25,0— 26,9
5,0—	—3,2	—11,3	—1,7	+0,1	0								—3,6
7,9	2	27	45	25	8								107
8,0—		+7,8	+0,8	+3,2	+2,2	+3,5	+12,8						+3,0
10,9		4	14	54	55	29	4						160
11,0—			+6,6	+5,4	+2,7	+3,3	—1,7	+4,0					+3,3
13,9			3	14	43	39	9	3					111
14,0—			+8,6	+21,0	+2,9	—0,2	—1,2	—4,0					0
16,9			1	1	14	30	24	10					80
17,0—				—2,8	—1,6	+2,4	—2,9	—2,0	+2,3				—1,1
19,9				2	9	12	15	17	3				58
20,0—					+14,4	+3,1	+9,9	—7,7	—5,1				—2,0
22,9—					1	2	3	8	5				19
23,0—				—2,9	—2,9	—4,5	—0,7	+3,3		—4,6		+1,7	—0,3
25,9				1	1	1	3	4	1	1		1	11
26,0—				+5,8	+5,8	—12,8	—1		+5,3	+9,6			+3,5
28,9				1					1	2			5
29,0—													—6,0
31,9													2
Sum	—3,2	—8,8	—0,6	+2,7	+2,1	+2,3	—0,4	—2,6	—1,5	—4,6	+9,6	—3,5	+0,6
	2	31	63	96	132	113	59	42	9	1	2	3	553

Dersom leddet  $d^2h$  også tas bort, vil funksjonstypen

$$V u/b = a + d^2 + d_6^2h$$

gi en spredning på  $\pm 8.70 \text{ dm}^3$ . Tas  $d^2$  bort fra denne funksjonen, vil spredningen øke til  $\pm 14.65 \text{ dm}^3$ , noe som viser at  $d^2$  er et meget sterkt ledd i funksjonen.

Dersom bare  $d_6^2h$  tas bort, mens de øvrige fem variablene beholdes, vil spredningen øke fra  $\pm 8.22 \text{ dm}^3$  til  $\pm 15.00 \text{ dm}^3$ . Dette viser at  $d_6^2h$  er en meget god variabel. Tas barkleddet bort fra denne funksjonen, øker spredningen til  $\pm 15.40 \text{ dm}^3$ . Sammenlignet med barkleddets betydning i funksjonen for volumet på bark, der barkleddet senket spredningen med  $\pm 5.90 \text{ dm}^3$ , er denne senkning på  $\pm 0.40 \text{ dm}^3$  meget liten.

Ved beregning av funksjoner for volumet under bark er grunnmaterialet også delt opp i gruppene: A, (L+Ms), L, M, Ms og Mn. For hver av disse gruppene er det så beregnet en rekke funksjoner. For å sammenligne disse funksjonene er de testet mot det samme materiale som ble brukt ved testing av Rudens og Näslunds tabeller, og som også ble testet mot funksjonene II A, II L og II M.

I tabellene 16, 17, 18 og 19 er resultatene av disse beregningene att opp.

Tabell 16 viser de prosentiske differanser når funksjon I Au nyttes til kubering av bare lavlandsbjørk, og tabell 17 viser resultatet når samme funksjon nyttes for bare vanlig bjørk. Tabellene viser at funksjonen synes å kubere lavlandsbjørk og vanlig bjørk meget likt. Ved tolkingen av resultatene bør det legges mest vekt på de diameter- og høydeklasser som er godt representert i begge tabellene.

Tabell 18 viser de prosentiske differanser når kubikkmasse for lavlandsbjørk beregnes med funksjon I Lu. Sammenlignes dette resultat med tabell 16, går det fram at funksjon I Lu generelt ikke kuberer lavlandsbjørken bedre enn funksjon I Au. Derimot kuberer funksjon I Au de små trærne bedre enn funksjon I Lu.

Tabell 19 viser de prosentiske differanser når funksjon I Msu nyttes for vanlig bjørk fra hele landet. Sammenlignes tallene i tabell 19 med tallene i tabell 17, viser det seg at dette utvalg av vanlig bjørk fra hele landet er meget likt kubert av de to funksjonene I Au og I Msu.

Disse beregningene viser at funksjon I Au gir en lik kubering av lavlandsbjørk og vanlig bjørk, og en relativt like god kubering av både små og store dimensjoner. Sammenlignet med funksjon I Au gir funksjon I Lu en dårligere kubering av de små dimensjonene av lavlandsbjørk enn for vanlig bjørk, og en uforandret kubering av de øvrige dimensjoner. Vanlig bjørk blir kubert like godt med funksjon I Au og I Msu.

Dette gir beskjed om at gruppering av materialet og beregning av egne volumfunksjoner for gruppene ikke har gitt bedre kubering enn når den vanlige funksjon I Au benyttes.

Beregningen av funksjoner for volumet under bark peker på at det ikke er en vesentlig forskjell i formen under bark hos lavlandsbjørk og vanlig bjørk. Dette betyr videre at de forskjeller som ble påvist mellom vanlig bjørk og lavlandsbjørk ved testing av funksjon II A (se tabell 14 og 15), må skyldes at barkleddet, som før påpekt, ikke korrigerer godt nok for den variasjon i formet som varierende barktykkelse forårsaker.

Ved beregning av volum under bark i vil følgende funksjoner være mest nøyaktige:

$$V_u/b = -14,8081 + 1,6949 d^2 + 0,1834 d^2h + 0,1018 dh^2 - 0,4510 h^2$$

$$\bar{R} = 0,994 \quad \bar{S} = \pm 15,40 \text{ dm}^3 \text{ ): } \pm 13,7 \%$$

For trær mindre enn 5 cm — 5 m vil funksjon I Mnu gi en god kubering:

$$V_{nu} = 7,1550 + 0,9405 d^2 + 0,1749 d^2h + 0,1619 dh^2 - 0,5863 h^2$$

$$\bar{R} = 0,995 \quad \bar{S} = \pm 3,57 \text{ dm}^3 \text{ ): } \pm 8,3 \%$$

Beregning av volumet under bark vil også bli nøyaktigere dersom diameteren ved 6 m tas med som variabel i funksjonen:

$$V_u/b = 24,3996 + 2,5391 d^2 - 0,0311 d^2h + 0,3291 dh^2$$

$$\bar{R} = 0,998 \quad \bar{S} = \pm 8,61 \text{ dm}^3 \text{ ): } \pm 7,6 \%$$

## VI. Kubikktabeller for bjørk på rot

Da funksjon II A har både diameter, høyde og barktykkelse som variabler, kan volumverdiene ikke direkte settes opp i en toveis tabell. Ved trykking av volumtabellen er det først satt opp en grunntabell der inngangen er diameter med bark i cm og høyde i meter. Deretter er det beregnet en korrekstabsell der inngangen er diameter med bark i cm og dobbelt barktykkelse i mm. Den korreksjonsmåte som her er nyttet, er i prinsippet den samme som er beskrevet i Det norske Skogforsøksvesens kubikktabell og bestandsvolumtabell for furu (BRANTSEG 1966).

Med en rettlinjete regresjon er den gjennomsnittlige barktykkelse for hver diameterklasse funnet å være:

$$b = 1.046 d$$

I funksjon II A er b satt lik 1.046 d, og barkleddet  $0.04214 d^2 b$  går over til  $0.04214 d^2 \cdot 1.046 d$ . Denne funksjon er beregnet for de aktuelle diameter- og høydeklasser, og volumene er satt opp i tabell 20. Ved siden av denne grunn-

tabellen er det beregnet en korreksjonstabell som tar hensyn til varierende barktykkelse, slik at volumtallene i grunntabellen kan korrigeres når barktykkelsen avviker fra det gjennomsnittlige for diameterklassen.

Korreksjonsleddet er beregnet som differansen mellom det virkelige barkleddet  $0.04214 d^2 b$ , og leddet  $0.04214 d^2 \cdot 1.046 d$ .

Korreksjonsleddet =  $0.04214 (1.046 d - b)$

Korreksjonsleddet er beregnet for de aktuelle verdier av diameter og dobbelt barktykkelse, og er satt opp i tabell 21.

Dersom virkelig barktykkelse er større enn den gjennomsnittlige for diameterklassen, vil korreksjonsleddet få en negativ verdi som grunntabellens volum skal reduseres med. Dersom barktykkelsen er mindre enn den gjennomsnittlige for diameterklassen, vil korreksjonsleddet få en positiv verdi som skal legges til grunntabellens volum. For de større dimensjoner og når differansen mellom virkelig og gjennomsnittlig barktykkelse er stor, vil korreksjonsleddet bli betydelig. Eks.: Et tre har  $D_{1.3} m/b = 28$  cm,  $H = 25$  m og  $b = 20$  mm. I grunntabellen finnes først volumet for 28 cm — 25 m som er lik  $632$  dm<sup>3</sup>. I korreksjonstabellen for 28 cm — 20 mm finnes korreksjonsleddet  $+ 24$  dm<sup>3</sup>. Treets volum vil derfor bli  $632 + 24 = 656$  dm<sup>3</sup>.

I funksjon I Au inngår bare diameter og høyde i variablene, og denne funksjon kan derfor direkte tabuleres i en to-veis tabell. Volumtabell under bark etter funksjon I Au er satt opp i tabell 22.

## VII. Sammendrag

På grunnlag av 3312 seksjonsmålte trær er det beregnet volumfunksjoner og volumtabeller for bjørk med og uten bark.

Av en rekke beregnede funksjoner er funksjonene I A, II A og III A funnet å være de beste. (Se side .47. og side .48.). En nærmere vurdering av disse funksjonene viser at funksjon II A er tydelig bedre enn I A, noe som bekrefter at barktykkelsen er en meget viktig variabel. Se tabell 8 og 9. I funksjon III A er diameteren ved 6 meter tatt med som variabel. III A har en spredning omkring funksjonen på  $\pm 9.09$  dm<sup>3</sup>, mens spredningen omkring II A er  $\pm 16.95$  dm<sup>3</sup>. Når diameteren ved 6 meter tas med som variabel i funksjonen, vil nøyaktigheten ved kubering øke betraktelig.

Sammenligning av en del av grunnmaterialet med Näslunds volumfunksjoner viser at lavlandsbjørk blir systematisk overkubert og vanlig bjørk blir systematisk underkubert, selv om barktykkelsen er med i funksjonene. Dette må enten betyr at vanlig bjørk også under bark har bedre form enn lavlandsbjørk, eller at barkleddet ikke tar opp hele den virkning som økende barktyk-

se har på formen utenpå bark. For å undersøke dette forhold nærmere, ble grunnmaterialet delt mellom vanlig bjørk og lavlandsbjørk. Materialet av lavlandsbjørk stammer i sin helhet fra Sørlandet og Østlandet. Materialet av vanlig bjørk er delt i to grupper. Den ene gruppen består av trær fra Sørlandet og Østlandet, og den andre gruppen av trær fra Trøndelag og Nord-Norge. For hver av disse gruppene er en rekke funksjonstyper beregnet, og de beste fra hver gruppe er vurdert mot hverandre for å studere hvilken reell effekt på nøyaktigheten denne gruppering har.

Beregningene viser at det ikke er nødvendig å utarbeide egne funksjoner for det sydlige og for det nordlige Norge. En generell funksjon som omfatter hele landet gir like god kubering i begge landsdeler. Videre er det vist at en beregning av særskilte funksjoner for vanlig bjørk og lavlandsbjørk ikke har gitt bedre kubering av de to artene, enn når den generelle funksjon II A benyttes. For små trær gir funksjon I Mu bedre resultat enn funksjon II A.

For volumet under bark er det beregnet tilsvarende funksjoner for hele grunnmaterialet og for de samme grupper av grunnmaterialet som for volumet på overbark. En vurdering av de beregnede funksjoner viste at den generelle funksjonen I Au gir like god kubering av både vanlig bjørk og lavlandsbjørk fra hele landet, som funksjoner beregnet innen de forskjellige grupper. Særskilte funksjoner for artene eller de geografiske områder synes derfor å være lite nyttige.

Også for volumet under bark vil volumet kunne bestemmes med større nøyaktighet når diameteren ved 6 meter tas med som variabel (funksjon III Mu). For småtrær gir funksjon I Mnu nøyaktigere resultat enn funksjon I Au. Funksjon II A er beregnet for de aktuelle diametre- og høydeklasser og volumet er satt opp i tabell 20. Ved siden av denne grunntabellen er det beregnet en korreksjonstabell, tabell 21, som tar hensyn til varierende barktykkelse, slik at volumet i tabell 20 kan korrigeres når barktykkelsen avviker fra det gjennomsnittlige for diameterklassen. I tabell 22 er volumet under bark beregnet med funksjon I Au og satt opp for de aktuelle diametre- og høydeklasser.





for bjørk, stående træer.  
birch, standing trees.

Volume included bark in dm<sup>3</sup>

Height over the stump in meter

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
48	51												
60	63	66	69										
73	77	80	84	88	92								
87	91	96	100	105	109	114	118						
101	107	112	118	123	128	134	139	144	150				
117	124	130	136	142	149	155	161	167	174	180	186		
134	141	149	156	163	170	177	185	192	199	206	214	221	228
152	160	168	177	185	193	201	210	218	226	234	243	251	259
170	180	189	198	208	217	226	236	245	255	264	273	283	292
190	200	211	221	232	242	253	263	274	284	295	305	316	327
210	222	234	245	257	269	280	292	304	316	327	339	351	363
232	245	257	270	283	296	309	322	335	348	361	375	388	401
254	268	282	296	311	325	339	354	368	382	397	411	426	440
276	292	308	323	339	355	371	386	402	418	434	450	465	481
300	317	334	351	368	386	403	420	437	455	472	489	507	524
324	343	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530	549	568
349	369	390	410	430	450	471	491	512	532	552	573	593	614
375	397	419	440	462	484	506	528	550	572	595	617	639	661
401	425	448	472	496	519	543	567	590	614	638	662	686	710
428	453	479	504	530	555	581	606	632	657	683	708	734	760
455	483	510	537	564	592	619	646	674	701	729	756	784	811
483	513	542	571	600	629	659	688	717	747	776	805	835	864
512	543	574	605	637	668	699	730	762	793	824	856	887	919
541	574	607	641	674	707	740	774	807	840	874	907	941	974
571	606	641	676	712	747	782	818	853	889	924	960	995	1 031
601	638	675	713	750	788	825	863	901	938	976	1 014	1 052	1 089
631	671	710	750	790	829	869	909	949	989	1 029	1 069	1 109	1 149
	704	746	788	830	872	914	956	998	1 040	1 082	1 125	1 167	1 209
	738	782	826	870	915	959	1 004	1 048	1 093	1 137	1 182	1 227	1 271
		818	865	912	958	1 005	1 052	1 099	1 146	1 193	1 240	1 287	1 334
		855	904	953	1 003	1 052	1 101	1 151	1 200	1 250	1 299	1 349	1 399
			944	996	1 048	1 099	1 151	1 203	1 255	1 307	1 360	1 412	1 464

Tabell 21. Korreksjonstabell. Denne tabell gir de verdier som volumet funnet

Tabellinngang: Dobbel bark i mm og brysth

Correction table. This table indicate the values which the volume found in tab

Table-entrance: Double bark in mm and brea

	Dobbel bark i mm													
	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
5	0	0	0											
6	0	0	0	-1										
7	1	0	0	-1	-1									
8		1	0	0	-1	-2								
9		1	0	0	-1	-2								
10		2	1	0	-1	-1	-2							
11			2	1	0	-1	-2	-3						
12			3	2	0	-1	-2	-3	-5					
13			4	3	1	0	-2	-3	-5	-6				
14			5	4	2	1	-1	-3	-4	-6	-8			
15				5	3	2	0	-2	-4	-6	-8	-10		
16				7	5	3	1	-1	-4	-6	-8	-10	-12	
17				9	7	5	2	0	-3	-5	-8	-10	-12	
18				12	9	7	4	1	-2	-4	-7	-10	-13	-15
19					12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15
20					15	12	8	5	2	-2	-5	-9	-12	-15
21					19	15	11	7	4	0	-4	-7	-11	-15
22						18	14	10	6	2	-2	-6	-10	-14
23						22	18	14	9	5	0	-4	-9	-13
24						27	22	17	12	8	3	-2	-7	-11
25						32	27	21	16	11	6	0	-5	-10
26							32	26	21	15	9	3	-2	-8
27							38	31	25	19	13	7	1	-5
28							44	37	31	24	17	11	4	-2
29								51	44	37	30	22	15	8
30									51	43	36	28	20	13
31									58	50	42	34	26	18
32									67	58	50	41	32	24
33										67	57	48	39	30
34										76	66	56	47	37
35										86	75	65	55	44
36										96	86	75	64	53
37											96	85	73	62
38											108	96	84	71
39											120	108	95	82
40											134	120	107	93

tabell 20 skal korrigeres med for å gi et nøyaktigere volum med bark.

Øydediameter m/b i cm. Volum i dm<sup>3</sup>.

Table 20 have to be corrected for to give a more accurate volume included bark.

Height diameter included bark in cm. Volume in dm<sup>3</sup>.

Double bark in mm

	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
-18															
-19	-22														
-19	-22	-26													
-18	-22	-26	-31												
-18	-22	-27	-31	-36											
-17	-22	-26	-31	-36	-41										
-15	-21	-26	-31	-36	-42										
-14	-19	-25	-31	-36	-42	-48									
-12	-18	-24	-30	-36	-42	-48	-55								
-9	-16	-22	-29	-35	-42	-49	-55	-62							
-6	-13	-20	-27	-34	-41	-48	-56	-63	-70						
-2	-10	-18	-25	-33	-40	-48	-55	-63	-71	-78					
2	-6	-14	-23	-31	-39	-47	-55	-63	-71	-79	-87				
6	-2	-11	-20	-28	-37	-45	-54	-63	-71	-80	-89	-97			
12	2	-7	-16	-25	-34	-44	-53	-62	-71	-80	-89	-99			
17	8	-2	-12	-22	-31	-41	-51	-61	-70	-80	-90	-100	-109		
24	13	3	-7	-18	-28	-38	-48	-59	-69	-79	-90	-100	-110	-121	
31	20	9	-2	-13	-24	-35	-46	-56	-67	-78	-89	-100	-111	-122	
39	27	16	4	-7	-19	-31	-42	-54	-65	-77	-88	-100	-111	-123	
47	35	23	11	-2	-14	-26	-38	-50	-62	-75	-87	-99	-111	-123	
56	44	31	18	5	-8	-21	-33	-46	-59	-72	-85	-97	-110	-123	
66	53	39	26	12	-1	-15	-28	-42	-55	-69	-82	-95	-109	-122	



for bjørk, stående træer.  
birch, standing trees.

Volume under bark in dm<sup>3</sup>

Height over the stump in meter

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
51	54												
63	67	71	75										
76	81	85	90	95	100								
90	95	101	107	112	118	124	131						
105	111	118	124	131	138	145	152	159	167				
121	128	135	143	150	158	166	174	182	191	200	209		
138	146	154	162	171	180	188	198	207	217	227	237	247	257
156	165	174	183	192	202	212	222	233	244	255	266	277	289
175	184	194	205	215	226	237	248	260	272	284	296	309	322
194	205	216	228	239	251	263	276	288	301	315	328	342	356
215	227	239	251	264	277	290	304	318	332	347	361	376	392
237	250	263	276	290	304	319	334	349	364	380	396	412	429
260	273	288	302	317	333	349	365	381	398	415	432	450	468
283	298	314	330	346	362	379	397	414	432	451	469	488	508
308	324	341	358	375	393	411	430	449	468	488	508	529	549
333	351	369	387	406	425	445	464	485	505	527	548	570	592
360	379	398	417	438	458	479	500	522	544	567	590	613	637
387	407	428	449	470	492	514	537	560	584	608	632	657	683
416	437	459	481	504	527	551	575	600	625	651	677	703	730
445	468	491	515	539	564	589	615	641	667	695	722	750	779
476	500	524	550	575	601	628	655	683	711	740	769	799	829
507	533	559	585	612	640	668	697	726	756	786	817	849	881
539	566	594	622	651	680	710	740	771	802	834	867	900	934
572	601	630	660	690	721	752	784	817	850	884	918	953	988
607	637	668	699	731	763	796	830	864	899	934	970	1 007	1 044
642	674	706	739	772	807	841	877	913	949	986	1 024	1 062	1 101
678	711	745	780	815	851	887	925	962	1 001	1 040	1 079	1 119	1 160
	750	786	822	859	897	935	974	1 013	1 053	1 094	1 136	1 178	1 220
	790	827	865	904	943	983	1 024	1 065	1 107	1 150	1 194	1 238	1 282
		870	910	950	991	1 033	1 076	1 119	1 163	1 207	1 253	1 299	1 345
		913	955	997	1 040	1 084	1 129	1 174	1 219	1 266	1 313	1 361	1 410
			1 001	1 046	1 091	1 136	1 183	1 230	1 277	1 326	1 375	1 425	1 476

## VIII. Litteratur

- BRANTSEG, A. 1966: Furu sønnafjells. Volumtabeller. Manus.
- CUNIA, T. 1964: Weighted least squares method and construction of volume tables. *Forest science*. 10: 180—191.
- GEDNEY, D. R. and JOHNSON, F. A. 1959: Weighting factors for computing the relation between tree volume and d.b.h. in the Pacific Northwest. Research note. U.S. Department of Agriculture. 174, 3 pp.
- ILVESSALO, Y. 1947: Volume tables for standing trees. Summary. *Communicationes Instituti Forestalis Fenniae*. 34, 4: 149 pp.
- NÄSLUND, M. 1940: Funktioner och tabeller för kubering av stående träd. *Medd. Statens Skogforskningsinst.* 32: 87—131.
- 1947: Funktioner och tabeller för kubering av stående träd. *Medd. Statens Skogforskningsinst.* 36, 3: 81 pp.
- POLLANSCHÜTZ, J. 1961: Eine neue Form- und bzw. Kubierungsfunktion. IUFRO — 13. Kongress. Berichte. 2. Teil, Band 2.
- RUDEN, T. 1944: Kubering av bjørk på rot. *Medd. Norsk Skogforsøksv.* 8: 517—529.
- STRAND, L. 1959: Nyaktigheten ved noen metoder til bestemmelse av kubikk- og tilvekstmassen på prøveflater. *Medd. Norske Skogforsøksv.* 15: 280—392.
- VUOKILA, Y. 1960: Tree volume functions and tables for larch. *Communicationes Instituti Forestalis Fenniae*. 51, 10: 89 pp.
- WILLIAMS, E. J. 1959: Regression analysis. New York. IX, 214 s.

## IX. Summary

In 1944 The Norwegian Forest Research Institute published volume tables for birch outside bark (RUDEN 1944). In Sweden volume functions for birch both outside and inside bark have been published (NÄSLUND 1940 and 1947). To investigate whether the Norwegian or any of the Swedish tables were so well adapted that it would be unnecessary to calculate new volume functions for birch, a material of sectionally cubed birch from 1920 trees was tested against the tables. This inquiry shows that the volume of *Betula pubescens* is systematically underestimated and that *Betula verrucosa* is systematically overestimated even when bark thickness is included as a variable in the functions. See tables 4 to 7 and figures 1 to 3. The calculated deviations are not particularly large, but large enough to justify the construction of new volume functions for birch.

The new volume functions are calculated on the basis of sectional measurements of 3312 trees. Of a series of calculated functions, I A, II A and III A were found to be most accurate. A closer evaluation of these functions shows that II A is clearly better than I A. This confirms that bark thickness is a very important variable. See tables 8 and 9. In function III A the diameter at 6 m above the ground is included as a variable. III A gives a standard error of estimate of  $\pm 9.09 \text{ dm}^3$ , while the deviation from II A is  $\pm 16.95 \text{ dm}^3$ . When the diameter at 6 m is included in the function, the accuracy of the volume estimate will increase considerably.

Testing of part of the data against the volume functions of Näslund indicated that the volume of *B. verrucosa* is systematically overestimated. *B. pubescens* is systematically underestimated, even when the bark thickness was included in the functions. This must imply either that *B. pubescens* also under bark has a better form than *B. verrucosa*, or that the variable denoting bark thickness in the function does not account for all the effect that increasing bark thickness has on the form outside bark. In order to study this relationship more closely the data were grouped according to species in *B. verrucosa* and *B. pubescens*. All the data for *B. verrucosa* are from Sørlandet and Østlandet. The data for *B. pubescens* have been divided into two groups. One group consists of trees from Sørlandet and Østlandet, the other group consists of trees from Trøndelag and North-Norway. For each of these groups a series of functions has been calculated and the best functions for each group have been appraised to study the effect of grouping on the accuracy of the functions. The calculations show that it is unnecessary to establish separate functions for South and North Norway because a common function will give equally accurate volume estimates in both districts. Further it is shown that a calculation of separate functions for *B. verrucosa* and *B. pubescens* has not given

more accurate volume estimates for the two species than the estimates obtained using the common function II A. For small trees the function I Mn will give better results than the function II A.

For volume under bark comparable functions are calculated for all the data and for the same groups of the basic data as for the volume on bark. An appraisal of the calculated functions shows that the common function I Au gives just as accurate volume estimates of both *B. pubescens* and *B. verrucosa* from the whole country as functions calculated for the separate groups. Specific functions for the species and the geographical areas are therefore unnecessary.

Also for the volume under bark the accuracy of the volume determination will increase when the diameter at 6 m is included as a variable (function III Au). For small trees the function I Mnu gives more accurate results than the function I Au.

Function II A has been calculated for the diameters and height classes of interest, and the volume is presented in table 20. In addition to this table data for adjustment are entered in table 21. This is in accordance with principles adapted by The Norwegian Forest Research Institute for volume tables for *Pinus sylvestris* (BRANTSEG 1966). This table takes into account the variations in bark thickness, so that the data for volume in table 20 can be adjusted when the thickness of the bark deviates from the mean within each diameter class.

The volume under bark is calculated according to function I Au and entered in table 22 for the diameters and height classes of interest.